Exercice 1 (Cours)
Donner (et prouver) le résultat concernant les variations d'une suite récurrente d'ordre 1.

Exercice 2 (Cours)
Donner (et prouver) le résultat de croissance comparée de suites de limites infinies.

Exercice 3 (Cours)
Donner (et prouver) le premier résultat sur les développements asymptotiques, obtenu par la dérivabilité.

Exercice 4
Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et convergente. Montrer, en utilisant la définition, que la suite u est stationnaire.

Exercice 5
Soit (u_n) une suite convergente. La suite $(\lfloor u_n \rfloor)$ est-elle convergente ?

Exercice 6
Soit (u_n) une suite de nombres réels.

1. On suppose que (u_n) est croissante et qu'elle admet une suite extraite convergente. Que dire de (u_n) ?
2. On suppose que (u_n) est croissante et qu'elle admet une suite extraite majorée. Que dire de (u_n) ?
3. On suppose que (u_n) n'est pas majorée. Montrer qu'elle admet une suite extraite qui diverge ves $+\infty$.

Exercice 7
Étudier la convergence des suites définies par le terme général suivant :

$$a)\ u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1} \qquad b)\ v_n = \frac{n\sin(n)}{n^2+1}$$

$$c)\ w_n = (-1)^n \frac{n+1}{n} \qquad d)\ x_n = \frac{\ln(n+e^n)}{n}$$

$$e)\ y_n = \frac{\ln(n+3)}{\sqrt{\ln(\ln(n+3))}} \qquad f)\ z_n = \frac{\ln(n!)}{n^2}$$

Exercice 8
On considère la suite (a_n) définie par

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}.$$

1. Montrer que pour tout $n > 0$, on a
$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq a_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}.$$
2. En déduire la limite de (a_n).

Exercice 9
Donner la nature de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \left(2\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{3}{4}\cos(n)\right)^n.$$

Exercice 10
Soit (u_n) la suite définie par

$$u_n = \sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \sqrt{\cdots + \sqrt{1}}}}.$$

1. Écrire une formule de récurrence liant u_{n-1} et u_n.
2. Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$ est bornée.
3. Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 11
Donner l'expression du terme général des suites récurrentes (u_n) suivantes.

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n,\ u_0 = 3, u_1 = 5 \qquad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n,\ u_0 = 1, u_1 = 0$$
$$u_{n+2} = u_{n+1} - u_n,\ u_0 = 1, u_1 = 2$$

Exercice 12
Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k! \underset{+\infty}{\sim} n!.$$

Exercice 13
Donner un équivalent le plus simple possible des suites suivantes

$$1)\ u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \qquad 2)\ v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$$

$$3)\ w_n = \frac{n^3 - \sqrt{1+n^3}}{\ln(n) - 2n^2} \qquad 4)\ z_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$