Exercice 1 (Cours)
Prouver qu'une suite convergente admet une unique limite.

Exercice 2 (Cours)
Prouver qu'une suite convergente est bornée.

Exercice 3 (Cours)
Donner et démontrer le théorème de la limite monotone.

Exercice 4
Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Si l'affirmation est vraie, la prouver, sinon, donner un contre-exemple.

1. Si (u_n) et (v_n) divergent, alors $(u_n + v_n)$ diverge.
2. Si (u_n) et (v_n) divergent, alors $(u_n \times v_n)$ diverge.
3. Si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors $(u_n + v_n)$ diverge.
4. Si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors $(u_n \times v_n)$ diverge.
5. Si (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) tend vers $+\infty$.
6. Si (u_n) est positive et tend vers 0, alors (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

Exercice 5
Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et convergente. Montrer, en utilisant la définition, que la suite u est stationnaire.

Exercice 6
Soit (u_n) une suite convergente. La suite $(\lfloor u_n \rfloor)$ est-elle convergente ?

Exercice 7
Soit (u_n) une suite de nombres réels.

1. On suppose que (u_n) est croissante et qu'elle admet une suite extraite convergente. Que dire de (u_n) ?
2. On suppose que (u_n) est croissante et qu'elle admet une suite extraite majorée. Que dire de (u_n) ?
3. On suppose que (u_n) n'est pas majorée. Montrer qu'elle admet une suite extraite qui diverge ves $+\infty$.

Exercice 8
Soit (u_n) une suite de nombres réels.

1. On suppose que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite. Prouver que (u_n) est convergente.
2. Donner un exemple de suite (u_n) telle que (u_{2n}) converge, (u_{2n+1}) converge, mais (u_n) ne converge pas.

Exercice 9
Étudier la convergence des suites définies par le terme général suivant :

a) $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$ *b)* $v_n = \dfrac{n\sin(n)}{n^2+1}$

c) $w_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$ *d)* $x_n = \dfrac{\ln(n+e^n)}{n}$

e) $y_n = \dfrac{\ln(n+3)}{\sqrt{\ln(\ln(n+3))}}$ *f)* $z_n = \dfrac{\ln(n!)}{n^2}$

Exercice 10
On considère la suite (a_n) définie par

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}.$$

1. Montrer que pour tout $n > 0$, on a
$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq a_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}.$$
2. En déduire la limite de (a_n).

Exercice 11
Soit (H_n) la suite définie par

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
2. En déduire que la suite (H_n) tend vers $+\infty$.