Exercice 1 (Cours)
Donner (et prouver) le résultat sur l'unicité de l'inverse.

Exercice 2 (Cours)
Donner (et prouver) le résultat concernant l'intersection de sous-groupes.

Exercice 3 (Cours)
Donner (et prouver) le résultat concernant l'image directe et l'image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupe.

Exercice 4
Pour tous $x, y \in]-1,1[$, on pose

$$x \oplus y = \frac{x+y}{1+xy}.$$

1. Montrer que $\oplus$ est une loi de composition interne sur $]-1,1[$.
2. Montrer que $(]-1,1[,\oplus)$ est un groupe commutatif.

Exercice 5
Pour tous $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on pose

$$(x,y) \star (x',y') = (xx', xy'+y).$$

1. Montrer que $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \star)$ est un groupe. Est-il abélien ?
2. Simplifier $(y,n)^n$ pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6
Soit $(G,\cdot)$ un groupe, H un sous-groupe de G, et $a \in G$. Montrer que l'ensemble

$$aHa^{-1} = \left\{aha^{-1} \mid h \in H\right\}$$

est un sous groupe de G.

Exercice 7
Soit $(G,+)$ un groupe abélien, d'élément neutre noté 0. On dit que $x \in G$ est un *élément de torsion* de G s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$nx = 0.$$

Démontrer que l'ensemble des éléments de torsion de G est un sous-groupe de G.

Exercice 8
Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \left\{a + b\sqrt{3} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ est un corps.

Exercice 9
Soit $(A,+,\cdot)$ un anneau. On dit que A est un *anneau de Boole* si, pour tout $x \in A$, on a

$$x^2 = x.$$

Supposons que A est un tel anneau.

1. Démontrer que, pour tout $x \in A$, on a $x = -x$.
2. Démontrer que A est commutatif.

Exercice 10
Soit $(A,+,\cdot)$ un anneau commutatif. On dit qu'un élément $x \in A$ est *nilpotent* s'il existe un entier $n \geq 0$ tel que

$$x^n = 0.$$

On fixe x et y deux éléments nilpotents de A.

1. Montrer que xy est nilpotent.
2. Montrer que $x+y$ est nilpotent.
3. Montrer que $1_A - x$ est inversible.
4. On ne suppose plus que A est commutatif. Soit $a, b \in A$ tels que ab soit nilpotent. Montrer que ba est nilpotent.

Exercice 11
Soit l'ensemble des rationnels à dénominateur impair

$$A = \left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\, \exists k \in \mathbb{N},\, n = 2k+1\right\}.$$

1. Démontrer que A est un anneau.
2. Quels sont ses éléments inversibles ?

Exercice 12
Soit $(A,+,\cdot)$ un anneau. On appelle *caractéristique* de A l'ordre de 1_A dans le groupe additif $(A,+)$. Dans la suite, on supposera que A admet une caractéristique finie $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in A$, on a $nx = 0$
2. Démontrer que si A est intègre, alors n est un nombre premier.
3. Démontrer que si A est intègre et commutatif, alors $x \mapsto x^n$ est un morphisme d'anneau.