Exercice 1 (Démonstration de cours)
Donner la factorisation de $a^n - b^n$ (3ème identité remarquable) et la démontrer.

Exercice 2 (Démonstration de cours)
Donner la formule de Pascal et la démontrer.

Exercice 3 (Démonstration de cours)
Rappeler les propriétés arithmétiques des coefficients binomiaux et les démontrer.

Exercice 4
Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

En déduire une expression en fonction de n de chacune des sommes suivantes.

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{k} p \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{k} k \qquad S_3 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{k} n$$

Exercice 5
Calculer la somme

$$S = \sum_{k=1}^{n} (n-k+1).$$

Exercice 6
Pour $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}.$$

Calculer explicitement u_n, puis en déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 7
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.
2. En déduire la valeur de $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^k$.

Exercice 8
Calculer les sommes doubles suivantes.

$$S_1 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} ij \qquad S_2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{i}{j}$$

Exercice 9
Soit $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$. Démontrer que

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Exercice 10
Calculer les produits suivants.

$$P_1 = \prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{1}{k}) \qquad P_2 = \prod_{k=1}^{n} \sqrt{k(k+1)} \qquad P_3 = \prod_{k=1}^{n} (2k) \qquad P_4 = \prod_{k=1}^{n} \frac{4^k}{k^2}$$

Exercice 11
Calculer les sommes suivantes.

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} k \times k! \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{n} \cos(\frac{k\pi}{2}) \qquad S_4 = \sum_{k=0}^{n} (3k+7)$$

Exercice 12
Montrer par récurrence que

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

Exercice 13
Calculer

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}.$$

Exercice 14
Quel est le coefficient de $x^a y^b z^c$ dans le développement de l'expression $(x+y+z)^n$?

Exercice 15
Calculer la somme suivante :

$$\sum_{k=-5}^{15} k(10-k).$$