⋆ **Exercice 1** (Cours)
Donner le théorème de comparaison de séries à termes positifs avec des O.

⋆ **Exercice 2** (Cours)
Donner le théorème sur les séries de Riemann.

⋆ **Exercice 3** (Cours)
Donner la règle de D'Alembert.

⋆ **Exercice 4**
Étudier la convergence de la série $\sum u_n$ dont le terme général est

$$a)\ u_n = \frac{n}{n^3+1} \qquad b)\ u_n = \frac{1}{n!} \qquad c)\ u_n = \frac{3^n+n^4}{5^n-2^n}$$

⋆ **Exercice 5**
Étudier la convergence de la série $\sum u_n$ dont le terme général est

$$a)\ u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad b)\ u_n = a^n n!,\ a\in\mathbb{R} \qquad c)\ u_n = n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

⋆ **Exercice 6**
Étudier la convergence de la série $\sum u_n$ dont le terme général est

$$a)\ u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}} \qquad b)\ u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}} \qquad c)\ u_n = \frac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$$

⋆ **Exercice 7**
Étudier la nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \frac{1}{n}$ si n est un carré, et $u_n = 0$ sinon.

⋆ **Exercice 8**
Étudier la convergence de la série $\sum u_n$ dont le terme général est

$$a)\ u_n = 1-\cos\frac{\pi}{n} \qquad b)\ u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \qquad c)\ u_n = ne^{-\sqrt{n}}$$

⋆ **Exercice 9**
Soit $x \in]-1,1[$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k.$$

⋆ **Exercice 10**
Sachant que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} = e,$$

déterminer la valeur des sommes suivantes.

$$S_1 = \sum_{n\geq 0}\frac{n+1}{n!} \qquad S_2 = \sum_{n\geq 0}\frac{n^2-2}{n!} \qquad S_3 = \sum_{n\geq 0}\frac{n^3}{n!}$$

⋆ **Exercice 11**
Dans cet exercice, on s'intéresse à la série

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

1. Justifier que cette série est convergente.
2. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange sur la fonction $t\mapsto \ln(1+t)$, montrer que la série est convergente de somme $\ln 2$.
3. Sachant que
$$\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}dt,$$
retrouver d'une autre façon le résultat précédent.

⋆ **Exercice 12**
Soit (u_n) une suite positive et décroissante. Prouver que si la série $\sum_n u_n$ est convergente, alors la suite (nu_n) tend vers 0.

⋆ **Exercice 13**
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives. On suppose que les deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ convergent. Prouver la convergence de $\sum_n \sqrt{u_n v_n}$ et de $\sum_n \max(u_n, v_n)$.

⋆ **Exercice 14**
Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs.

1. On suppose que $\sum_n u_n$ converge. Prouver que, pour tout $\alpha > 1$, la série $\sum_n (u_n)^\alpha$ converge.
2. On suppose que $\sum_n u_n$ diverge. Prouver que, pour tout $\alpha \in]0,1[$, la série $\sum_n (u_n)^\alpha$ diverge.