Exercice 1 (Cours)
Donner et prouver le résultat concernant la matrice d'un isomorphisme.

Exercice 2 (Cours)
Donner et prouver la propriété concernant le rang d'une matrice d'une famille de vecteurs.

Exercice 3 (Cours)
Donner et prouver la caractérisation du rang par les matrices extraites.

Exercice 4
Soient S et T les deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ définis par

$$S(x,y) = (2x-5y, -3x+4y) \qquad T(x,y) = (-8y, 7x+y).$$

1. Déterminer les matrices S et T dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les applications linéaires $S+T$, $S\circ T$, $T\circ S$, et $S\circ S$ ainsi que leurs matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5
On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Exercice 6
On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Donner une base de $\operatorname{Ker} f$ et de $\operatorname{Im} f$.
2. En déduire que $M^n = 0$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 7
Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application de $M_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 8
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n et $\phi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. On dit que ϕ est une *transvection* si

- on a l'inclusion $\operatorname{Im}(\phi - \mathrm{Id}_E) \subset \operatorname{Ker}(\phi - \mathrm{Id}_E)$;
- le sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker}(\phi - \mathrm{Id}_E)$ est de dimension $n-1$.

Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de ϕ peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

Exercice 9
Prouver qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ de rang r s'écrit comme somme de r matrices de rang 1.

Exercice 10
On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est M. On veut prouver que M et D sont semblables.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer qu'il existe $u_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que $\operatorname{Vect} u_1 = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$. De même, prouver l'existence de u_2 et u_{-4} tels que $\operatorname{Vect}(u_2) = \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ et $\operatorname{Vect}(u_{-4}) = \operatorname{Ker}(f + 4\,\mathrm{Id})$.
2. Démontrer que (u_1, u_2, u_{-4}) forme une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Conclure.