Exercice 1 (Démonstration de cours)
Rappeler la propriété concernant le *complémentaire d'une réunion* et le *complémentaire d'une intersection*. Prouver l'un des deux résultats (au choix).

Exercice 2 (Démonstration de cours)
Rappeler les propriétés concernant *l'image directe d'une intersection* et *l'image directe d'une union*. Prouver ces résultats.

Exercice 3 (Démonstration de cours)
Rappeler la définition d'une application *bijective* et prouver l'unicité de l'application réciproque.

Exercice 4
Soit E, F, G trois ensembles, et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Prouver que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Prouver que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
3. Prouver que si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective, et
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Exercice 5
Écrire l'ensemble des parties de $E = \{a, b, c, d\}$.

Exercice 6
Les applications suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ?

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n+1$

(b) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n+1$

(c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x+y, x-y)$

(d) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x+y$

Exercice 7
Soit f et g deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par $f(n) = 2n$ et
$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.
2. Les fonctions f et g sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ?

Exercice 8
On définit une relation binaire sur $\mathbb{R}^2$ par
$$(x, y) \sim (x', y') \Longleftrightarrow x = x'.$$
Démontrer que $\sim$ est une relation d'équivalence, et décrire la classe d'équivalence d'un élément $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 9
Est-ce que $A \subset B \cup C$ entraîne $A \subset B$ ou $A \subset C$?

Exercice 10
Soit trois ensembles A, B, C tels que
$$A \cup B = B \cap C.$$
Montrer que $A \subset B \subset C$.

Exercice 11
Soit E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.

1. Démontrer que si $A \cup B = A \cap B$, alors $A = B$.
2. Démontrer que si $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$, alors $B = C$. Une seule des deux conditions suffit-elle ?

Exercice 12
On note
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}.$$
Démontrer que l'ensemble D ne peut pas s'écrire comme le produit cartésien de deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

Exercice 13
Soit
$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - y = 1\right\} \text{ et } B = \{(t+1, 4t+3) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$
Démontrer que $A = B$.

Exercice 14
On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation $x \sim y$ si et seulement si $x + y$ est pair. Montrer qu'on définit ainsi une relation d'équivalence. Décrire les classes d'équivalence de cette relation.