Exercice 1 (Cours)
Donner et prouver le résultat concernant la liberté d'une famille de polynôme échelonnée en degré.

Exercice 2 (Cours)
Donner et prouver la caractérisation des racines par la divisibilité.

Exercice 3 (Cours)
Donner et prouver la caractérisation des racines multiples par les dérivées.

Exercice 4
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ des réels, et

$$P(X) = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1.$$

Pour quelles valeurs de a et b le polynôme P est-il le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 5
Résoudre les équations suivantes, où l'inconnue est un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$.

1) $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$ 2) $(P')^2 = 4P$ 3) $P \circ P = P$

Exercice 6
Calculer le quotient et le reste des divisions euclidiennes suivantes.

1. $X^4 + 5X^3 - 12X^2 + 19X - 7$ divisé par $X^2 + 3X - 1$.
2. $X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$ divisé par $X^2 - X - 7$.
3. $X^5 - X^2 + 2$ divisé par $X^2 + 1$.

Exercice 7
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme et $a, b \in \mathbb{C}$ deux complexes avec $a \neq b$.

1. Soit R le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$. Exprimer le R en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.
2. Soit R le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$. Exprimer R en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.

Exercice 8
Pour $n \geq 1$, on pose

$$P_n(X) = nX^{n+2} - (4n+1)X^{n+1} + 4(n+1)X^n - 4X^{n-1}.$$

Quel est l'ordre de multiplicité de 2 comme racine de P_n ?

Exercice 9
Soit

$$P(X) = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0$$

un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$, avec $a_n \neq 0$ et $a_0 \neq 0$. On suppose que P admet une racine rationnelle p/q avec $p \wedge q = 1$.

1. Démontrer que $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$.
2. Le polynôme $P(X) = X^5 - 2X^2 + 1$ admet-il des racines dans $\mathbb{Q}$?

Exercice 10
On considère les deux polynômes suivants.

$$P(X) = X^3 - 9X^2 + 26X - 24 \qquad Q(X) = x^3 - 7X^2 + 7X + 15$$

Décomposer ces deux polynômes en produits d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, sachant qu'ils ont une racine commune.

Exercice 11
Décomposer en produits d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants.

1) $X^4 + 1$ 2) $X^8 - 1$ 3) $(X^2 - X + 1)^2 + 1$

Exercice 12
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n ayant n racines réelles distinctes.

1. Démontrer que toutes les racines de P' sont réelles.
   Indication : on pourra étudier la fonction polynomiale $\widetilde{P}$ et utiliser un théorème d'analyse.
2. En déduire que le polynôme $P^2 + 1$ n'admet que des racines simples.

Exercice 13
Soit P le polynôme $X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$.

1. Décomposer $X^4 - 6X^3 + 9X^2$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2. En déduire une décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.