Exercice 1 (Cours)
Donner et prouver la caractérisation de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (Cours)
Prouver que les rationnels et les irrationnels sont denses dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (Cours)
Rappeler (et prouver) les propriétés de la partie entière.

Exercice 4
On définit sur $\mathbb{N}^*$ la relation

$$p \preceq q \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*,\ q = p^k.$$

1. Montrer que $\preceq$ définit une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$. Est-elle totale ?
2. Déterminer les majorants de $A = \{2, 3\}$ pour cet ordre.
3. L'ensemble A admet-il un maximum ? Une borne supérieure ?

Exercice 5 (Ordre lexicographique.)
Soit A et B deux ensembles, soit également $\leq_A$ une relation d'ordre sur A et $\leq_B$ une relation d'ordre sur B. On pose $\preceq$ la relation sur $A \times B$ définie par

$$(a, b) \preceq (a', b') \Longleftrightarrow ((a \leq_A a') \text{ ou } (a = a' \text{ et } b \leq_B b')).$$

1. Démontrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur $A \times B$. Est-elle totale ?
2. Supposons de plus que $\leq_A$ et $\leq_B$ sont deux ordres totaux. L'ordre $\preceq$ est-il total ?

Exercice 6
On munit $\mathbb{R}^2$ de la relation notée $\preceq$, définie par

$$(x, y) \preceq (x', y') \Longleftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y'.$$

1. Démontrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$. L'ordre est-il total ?
2. Le disque fermé de centre O et de rayon 1 a-t-il des majorants ? Un plus grand élément ? Une borne supérieure ?

Exercice 7
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 8
Soit A la sous-partie de $]0, +\infty[$ définie par

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1. L'ensemble A admet-il un plus grand élément ? Une borne supérieure ?
2. L'ensemble A admet-il un plus petit élément ?
3. L'ensemble A admet-il une borne inférieure dans $]0, +\infty[$? Dans $\mathbb{R}$?

Exercice 9
Soit A la sous-partie de $\mathbb{R}$ définie par

$$A = \left\{ \frac{mn}{(m+n)^2} \mid m, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

1. Montrer que pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$0 < \frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}.$$
2. En déduire que A admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on déterminera.
3. L'ensemble A admet-il un plus petit élément ? Et un plus grand élément ?

Exercice 10
Soit X la sous-partie de $\mathbb{R}$ définie par

$$X = \left\{ \frac{2xy}{x^2 + y^2} \mid x, y \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

1. Montrer que X admet une borne inférieure et la déterminer. Est-ce un minimum ?
2. Montrer que X admet une borne supférieure et la déterminer. Est-ce un maximum ?

Si vous voulez m'écrire : edouard.rousseau@uvsq.fr