**Exercice 1** (Cours)
Donner et prouver la propriété concernant l'inversibilité à gauche et à droite des matrices.

**Exercice 2** (Cours)
Donner et prouver la propriété concernant l'ensemble des matrices symétriques et celui des matrices antisymétriques.

**Exercice 3** (Cours)
Donner et prouver la propriété algébrique de la trace.

**Exercice 4**
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ deux réels non nuls et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec $A$, c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

**Exercice 5**
Déterminer deux éléments $A$ et $B$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que $AB = 0$ et $BA \neq 0$.

**Exercice 6**
On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^2$ puis $A^3$.
2. En déduire la valeur de $A^n$ pour tout $n \geq 1$.
3. Répondre aux mêmes questions pour $B$.

**Exercice 7**
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = A - I.$$

Calculer $B^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire $A^n$.

**Exercice 8**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \geq 1$ tel que $A^p = 0$. Démontrer que la matrice $I_n - A$ est inversible, et déterminer son inverse.

**Exercice 9**
On considère les matrices suivntes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $AB$ et $AC$. Que constante-t-on ?
2. La matrice $A$ peut-elle être inversible ?
3. Trouver toutes les matrices $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AF = 0$ (où 0 désigne la matrice nulle).

**Exercice 10**
Dire si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 11**
On considère les matrices suivntes.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$. En déduire que $A$ est inversible et calculer $A^{-1}$.
2. Calculer $B^3 - B$. En déduire que $B$ est inversible puis déterminer $B^{-1}$.
3. Calculer $C^2 - 3C + 2I_3$. En déduire que $C$ est inversible et calculer $C^{-1}$.

**Exercice 12**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\mathscr{C} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ MA = AM\}$$

le *centre* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. :

1. Soit $D = \lambda I_n$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Prouver que $D \in \mathscr{C}$.
2. Soit $M \in \mathscr{C}$ et $E_{i,j} = (\delta_{i,a}\delta_{j,b})_{1 \leq a,b \leq n}$ la matrice ayant un 1 seulement en position $(i, j)$. Que peut-on déduire de la condition $ME_{i,j} = E_{i,j}M$ ?
3. En déduire que $\mathscr{C}$ contient uniquement les matrices de la forme $\lambda I_n$.