Exercice 1 (Cours)
Donner et prouver la caractérisation séquentielle des limites.

Exercice 2 (Cours)
Donner et prouver le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 3 (Cours)
Donner et prouver le résultat concernant les fonctions continues qui coïcident sur l'ensemble $\mathbb{Q}$.

Exercice 4
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Prouver que la fonction f est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 5
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Démontrer que f admet toujours au moins un point fixe, *i.e.* il existe $y \in [0,1]$ tel que $f(y) = y$.

Exercice 6
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

1. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, on a $f(x) < g(x)$.
   (a) Prouver que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Prouver qu'on a pas l'inégalité stricte dans la question précédente.
2. On suppose maintenant que, pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$ avec $x < y$, on a $f(x) < f(y)$. Montrer que f est strictement croissante.

Exercice 7
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x)^2 = 1.$$

1. Démontrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Exercice 8
Que peut-on dire d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle non réduit à un point, continue, et ne prenant qu'un nombre fini de valeurs ?

Exercice 9
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Démontrer que f admet un minimum.

Exercice 10
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que, pour tout $x \in [a,b]$, on a

$$f(x) > g(x).$$

1. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \geq g(x) + \delta$ pour tout $x \in [a,b]$.
2. On suppose de plus que $g(x) > 0$ pour tout $x \in [a,b]$. Montrer qu'il existe $k > 1$ tel que $f(x) \geq kg(x)$ pour tout $x \in [a,b]$.
3. Les résultats restent-ils vrais si on remplace le segment $[a,b]$ par $\mathbb{R}$?

Exercice 11
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique qui admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 12
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathbb{R}$ un réel.

1. Démontrer que si la fonction f est continue en x_0, alors la fonction $|f|$ est continue en x_0.
2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 13
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}.$$

1. Étudier la continuité de f en 0.
2. Prouver que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x+1) = f(x) + 1$.
3. En déduire que f est continue en tout $x \in \mathbb{Z}$, puis sur $\mathbb{R}$.