⋆ **Exercice 1** (Cours)
Donner et prouver le résultat concernant la convergence des sommes de Riemann.

⋆ **Exercice 2** (Cours)
Donner et prouver la formule de Taylor avec reste intégral.

⋆ **Exercice 3** (Cours)
Donner et prouver l'inégalité de Taylor-Lagrange.

⋆ **Exercice 4**
Calculer les intégrales suivantes.

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4(x)} \qquad I_2 = \int_e^{2e} x^2 \ln(x) dx \qquad I_3 = \int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$$

⋆ **Exercice 5**
Calculer les intégrales suivantes.

$$I_1 = \int_0^1 (2x+3)\sqrt{x^2+3x+4} \quad I_2 = \int_0^1 \arctan(x) dx \quad I_3 = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x + x(\ln x)^2} dx$$

⋆ **Exercice 6**
Calculer les intégrales suivantes.

$$I_1 = \int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx \qquad I_2 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \qquad I_3 = \int_0^1 (x^3 - x) e^{2x} dx$$

⋆ **Exercice 7**
Soit (u_n) la suite définie par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Démontrer que (u_n) converge vers $\exp(1)$.

⋆ **Exercice 8**
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout couple $(\alpha, \beta) \in [a,b]^2$, on a

$$\int_\alpha^\beta f(x) dx = 0.$$

Montrer que f est la fonction nulle.

⋆ **Exercice 9**
On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Montrer que cette suite converge vers $\ln(2)$.

⋆ **Exercice 10** (Intégrale de Wallis)
Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$$

1. Justifier que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a $\cos(\frac{\pi}{2} - u) = \sin(u)$.
2. En déduire que
$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt.$$
3. Prouver que la suite (I_n) est strictement positive et décroissante.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une relation entre I_{n+2} et I_n.

⋆ **Exercice 11**
Déterminer la limite des suites définies par les termes généraux suivants.

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2} \qquad v_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k}$$

⋆ **Exercice 12**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que f' est T-périodique. On suppose que $f(T) \neq f(0)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$f(nT) - f((n-1)T) = f(T) - f(0).$$
2. En déduire que f n'est pas périodique.