⋆ **Exercice 1** (Cours)
Donner et prouver le théorème de Heine.

⋆ **Exercice 2** (Cours)
Donner et prouver la linéarité de l'intégrale.

⋆ **Exercice 3** (Cours)
Donner et prouver le résultat concernant l'intégrale nulle d'une fonction continue de signe constant.

⋆ **Exercice 4**
Soit f une fonction uniformément continue sur une partie D de $\mathbb{R}$. Soient (x_n) et (y_n) deux suites d'éléments de D telles que $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$.

1. Démontrer que $\lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$.
2. Dire si les fonctions suivantes sont uniformément continues sur l'intervalle considéré.
   (a) $f(x) = 1/x$ sur $[1, +\infty[$.
   (b) $f(x) = 1/x$ sur $]0, 1]$.
   (c) $f(x) = \sin(x^2)$ sur $\mathbb{R}$.

⋆ **Exercice 5**
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique pour une période $T > 0$. Prouver que f est uniformément continue.

⋆ **Exercice 6**
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue.

⋆ **Exercice 7**
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $|f(x)| \leq 1$ pour tout $x \in [a, b]$ et

$$\int_a^b f(x)dx = b - a.$$

Que dire de f ?

⋆ **Exercice 8**
Déterminer les fonctions continues $f : [0, 1] \to [0, 1]$ vérifiant

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 (f(t))^2\, dt.$$

⋆ **Exercice 9**
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| = \int_a^b |f(t)|dt.$$

Démontrer que f est de signe constant sur $[a, b]$.

⋆ **Exercice 10**
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (f(t))^n dt = 0.$$

⋆ **Exercice 11**
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a) = 0$.

1. Prouver que, pour tout $x \in [a, b]$, on a
$$|f(x)|^2 \leq (x - a) \int_a^b |f'(t)|^2 dt.$$
2. En déduire que
$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx.$$

⋆ **Exercice 12**
Calculer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants.

$$(a)\ u_n = \int_0^1 x^n \ln(1 + x)dx \qquad (b)\ u_n = \int_0^n \frac{dt}{1 + e^{nt}}$$

⋆ **Exercice 13**
Calculer les intégrales suivantes.

$$(a)\ \int_m^n \lfloor x \rfloor dx \text{ où } n, m \in \mathbb{Z}, m \leq n \quad (b)\ \int_{-1}^2 x|x|dx \quad (c)\ \int_0^1 \min(x, a)dx \text{ où } a \in \mathbb{R}$$