⋆ **Exercice 1** (Cours)
Donner et prouver la propriété sur les cycles (cardinal, caractérisation par les orbites).

⋆ **Exercice 2** (Cours)
Donner et prouver la propriété concernant la décomposition d'un cycle en transpositions.

⋆ **Exercice 3** (Cours)
Donner et prouver la propriété concernant la décomposition d'une permutation en cycles.

⋆ **Exercice 4**
Soit $n \geq 3$.

1. Soient $a, b \in \{1, \ldots, n\}$ avec $a \neq b$ et soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Calculer la permutation $\sigma \circ (a\ b) \circ \sigma^{-1}$.
2. On appelle *centre* de $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ qui commutent avec toutes les autres permutations. Déterminer le centre de $\mathfrak{S}_n$.

⋆ **Exercice 5**
Soit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Donner la signature de σ.
3. Décomposer σ en produit de transpositions.
4. Calculer σ^{2022}.

⋆ **Exercice 6**
Pour les permutations suivantes, décomposer σ_j en produits de cycles disjoints, en produit de transpositions, calculer l'ordre de σ_j, la signature de σ_j, et calculer σ_j^{100}.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

⋆ **Exercice 7**
Soit $n \geq 1$. Déterminer la signature de la permutation suivante :

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

⋆ **Exercice 8**
Soit $n \geq 2$.

1. Démontrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions $(1\,2), (1\ 3), \ldots, (1\ n)$.
2. Démontrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions $(1\,2), (2\ 3), \ldots, (n{-}1\ n)$.
3. On considère la transposition $\tau = (1\ 2)$ et le cycle $\chi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$. Calculer $\chi^k \tau \chi^{-k}$. En déduire que que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par τ et χ.

⋆ **Exercice 9**
Soit $n \geq 2$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation ayant k orbites. L'objectif de l'exercice est de prouver que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-k}$.

1. Prouver par récurrence que la signature d'un cycle de longueur ℓ est $(-1)^{\ell-1}$.
2. Utiliser le résultat précédent et la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints pour prouver que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-k}$.

⋆ **Exercice 10**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est une permutation, on définit $P_\sigma \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice carrée de taille $n \times n$ par $P_\sigma = \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$, où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice. Calculer AP_σ et $P_\sigma A$. Que constate-t-on ?
2. Soient $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ deux permutations. Calculer $P_\sigma P_\tau$.
3. Prouver que la matrice P_σ est inversible.

⋆ **Exercice 11**
Soit $n \geq 3$ un entier. Démontrer que $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les cycles de longueur 3.

⋆ **Exercice 12**
Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 7 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & 12 & 8 & 9 & 11 \end{pmatrix}$.

1. Combien σ possède-t-elle d'inversions ? Que vaut sa signature ?
2. Décomposer σ en produit de transpositions et retrouver sa signature.
3. Déterminer les orbites de σ et calculer σ^{2022}.