

EXERCICE 1

Résoudre les équations suivantes sur \mathbb{R} :

$$1) \ln(x^2 - 1) - \ln(2x - 1) + \ln 2 = 0 \quad 2) \log_{10}(x + 2) - \log_{10}(x + 1) = \log_{10}(x - 1)$$

EXERCICE 2

Résoudre l'équation suivante sur \mathbb{R} :

$$(E) : x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x.$$

EXERCICE 3

Simplifier les expressions suivantes :

$$1) x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}} \quad 2) \log_x \left(\log_x \left(x^{x^y} \right) \right)$$

EXERCICE 4

Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

$$1) |x + 3| = 5 \quad 2) |x + 3| \leq 5 \quad 3) |x + 2| > 7 \quad 4) |2x - 4| \leq |x + 2|$$

EXERCICE 5

Étudier la fonction $f : x \mapsto x^{-\ln(x)}$.

EXERCICE 6

Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x.$$

EXERCICE 7

Soit $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x) = (x - 2)e^x + (x + 2).$$

Démontrer que la fonction g est positive sur \mathbb{R}_+ .

EXERCICE 8

Trouver la plus grande valeur de $\sqrt[n]{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 9

Soit $0 \leq a, b \leq 1$. Prouver que $a + b \leq 1 + ab$.

EXERCICE 10

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction dérivable telle que pour tout $x \geq 0$, on a

$$f(x)e^{f(x)} = x.$$

Étudier les variations de f .

EXERCICE 11

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, montrer l'inégalité $(x - \sqrt{2}y)^2(x + \sqrt{2}y)^2 \leq x^4 + 4y^4$. À quelle condition a-t-on égalité ?

EXERCICE 12

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$.

1. Donner l'ensemble de définition de f .
2. Étudier les limites de f aux bords de son ensemble de définition.
3. Calculer les asymptotes de f si elles existent.

EXERCICE 13

Pour chacune des fonctions suivantes, donnez leur ensemble de dérivabilité ainsi que l'expression de leur fonction dérivée.

$$f : x \mapsto e^x(1 - x)^2 \quad g : x \mapsto \ln(e^x + e^{-x}) \quad h : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$i : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad j : x \mapsto \sin(x) - \frac{1}{3}\sin^2(x) \quad k : x \mapsto \tan^2(x) + \ln(\cos^2(x))$$

EXERCICE 14

Calculez les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 xe^x dx \quad J = \int_1^e x^2 \ln(x) dx \quad K = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{3}{x^2} \right) dx$$

$$L = \int_1^2 (2 - 4e^{3x}) dx \quad M = \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx \quad P = \int_0^1 \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 5} dx$$

EXERCICE 15

Faire l'étude complète (ensemble de définition, parité, limites, variations, asymptotes, courbe représentative) des fonctions suivantes.

$$f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x - 6} \quad g : x \mapsto 2|2x - 1| - |x + 2| + 3x$$

$$h : x \mapsto \frac{x^2 - 2x + 5}{x + 1} \quad j : x \mapsto \ln \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)$$