⋆ **Exercice 1** (Cours)
Rappeler et prouver le résultat concernant les séries produit de Cauchy.

⋆ **Exercice 2** (Cours)
Rappeler et prouver la propriété multiplicative de l'exponentielle.

⋆ **Exercice 3** (Cours)
Rappeler et prouver la propriété concernant la dérivabilité de l'exponentielle.

⋆ **Exercice 4**
Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$. La famille

$$(q^{|k|})_{k\in\mathbb{Z}}$$

est-elle sommable ? Quelle est sa somme ?

⋆ **Exercice 5**
Déterminer si les familles suivantes sont sommables, et si oui, déterminer leur somme.

a) $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[}$ *b)* $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ avec $a_{n,p} = \dfrac{1}{n^2-p^2}$ si $n \neq p$ et $a_{n,n} = 0$

⋆ **Exercice 6**
Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|a| < 1$, $|b| < 1$ et $a \neq b$.

1. Prouver que
$$\frac{1}{(1-a)(1-b)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$
2. Prouver que
$$\frac{1}{(1-a)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n.$$

⋆ **Exercice 7**
Pour $n \geq 0$, on pose

$$w_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{k!}.$$

1. Montrer que la série de terme général w_n converge.
2. Calculer sa somme en utilisant le produit d'une série géométrique par une autre série classique.

⋆ **Exercice 8**
Démontrer l'existence de la somme suivante et la calculer.

$$S = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}.$$

⋆ **Exercice 9**
Démontrer l'existence de la somme suivante et la calculer.

$$R = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

⋆ **Exercice 10**
Soit $x \in]-1, 1[$.

1. Démontrer que la famille $(x^{kl})_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.
2. En déduire que
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$$
où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.

⋆ **Exercice 11**
On pose, pour $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$,

$$a_{m,n} = \frac{1}{(m+n)^\alpha}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre donné. Étudier la sommabilité de la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$.

⋆ **Exercice 12**
Soit $(a_p)_{p\geq 1}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum_p a_p$ est absolument convergente. On pose $I = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et pour $(n, p) \in I$, on pose

$$u_{n,p} = \frac{p}{n(n+1)} a_p \text{ si } p \leq n,\ u_{n,p} = 0 \text{ sinon.}$$

Démontrer que la famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in I}$ est sommable et calculer sa somme.