Exercice 1 (Cours)
Donner (et prouver) la propriété concernant la multiplication par $-1 \in \mathbb{K}$.

Exercice 2 (Cours)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$, et $e_1, \ldots, e_n \in E$. Montrer que $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 3 (Cours)
Donner (et prouver) la propriété liant espaces vectoriels engendrés et réunions.

Exercice 4 (Cours)
Donner (et prouver) la caractérisation des sommes directes.

Exercice 5
Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est encore un sous-espace vectoriel si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 6
On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs

$$v_1 = (1,1,0),\ v_2 = (4,1,4),\ v_3 = (2,-1,4).$$

1. Montrer que la famille (v_1, v_2) est libre. Faire de même pour (v_1, v_3) et (v_2, v_3).
2. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?

Exercice 7
On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs

$$v_1 = (1,-1,1),\ v_2 = (2,-2,2),\ v_3 = (2,-1,2).$$

1. Peut-on trouver un vecteur w tel que (v_1, v_2, w) soit libre ? Si oui, construisez-en un.
2. Même question en remplaçant v_2 par v_3.

Exercice 8
Soit $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ non nuls, à degrés échelonnés, c'est-à-dire tels que

$$\deg P_1 < \deg P_2 < \cdots < \deg P_n.$$

Montrer que $(P_1, \ldots, P_n)$ est une famille libre.

Exercice 9
Donner un système d'équations des espaces vectoriels engendrés par les vecteurs suivants :

1. $u_1 = (1,2,3)$;
2. $u_1 = (1,2,3)$ et $u_2 = (-1,0,1)$;
3. $u_1 = (1,2,0)$, $u_2 = (2,1,0)$ et $u_3 = (1,0,1)$.

Exercice 10
Trouver une famille génératrice des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$.

1. $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\right\}$;
2. $G = \{(x,y,z) \mid x - y + z = 0 \text{ et } 2x - y - z = 0\}$.

Exercice 11
Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles, on pose

$$F = \{u \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = 0\} \text{ et } G = \{u \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = u_{2n+1}\}.$$

1. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Démontrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 12
Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note F l'ensemble des fonctions périodiques de période 1 et G l'ensemble des fonctions f telles que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

1. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Démontrer que $F \cap G = \{0\}$. Est-ce que F et G sont supplémentaires ?

Exercice 13
Dire si les ensembles suivants sont des espaces vectoriels.

1. $E_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = P(2)\}$;
2. $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(0) = 2\}$;
3. $E_3 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid Q \text{ divise } P\}$ pour $Q \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non-nul fixé;
4. $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont dérivables;
5. $E_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\right\}$;
6. $E_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2\right\}$.

Si vous voulez m'écrire : edouard.rousseau@uvsq.fr