⋆ **Exercice 1** (Cours)
Rappeler et prouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

⋆ **Exercice 2** (Cours)
Rappeler et prouver le théorème de Pythagore.

⋆ **Exercice 3** (Cours)
Rappeler et prouver le théorème concernant le supplémentaire orthogonal.

⋆ **Exercice 4**
Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, on définit

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{Tr}(A^t B).$$

1. Démontrer que cette formule définit un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire que si A et B sont symétriques, on a

$$\operatorname{Tr}(AB)^2 \leq \operatorname{Tr}(A^2)\operatorname{Tr}(B^2).$$

⋆ **Exercice 5**
Soient E un espace préhilbertien réel, $a \in E$ un vecteur unitaire et $k \in \mathbb{R}$. On définit $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ par

$$\phi(x, y) = \langle x, y\rangle + k\langle x, a\rangle \langle y, a\rangle .$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur k pour que ϕ soit un produit scalaire.

⋆ **Exercice 6**
Démontrer que les formules suivantes définissent des produits scalaires sur l'espace vectoriel associé.
1. $\langle f, g\rangle = f(0) + g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$ sur $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$
2. $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)w(t)dt$ sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ où $w \in E$ vérifie $w > 0$ sur $]a, b[$.

⋆ **Exercice 7**
Soit E un espace vectoriel euclidien et x, y deux éléments de E. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si $||x + \lambda y|| \geq ||x||$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

⋆ **Exercice 8**
Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.
1. Démontrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n\sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

et étudier les cas d'égalité.
2. On suppose en outre que $x_k > 0$ pour chaque $k \in \{1, \ldots, n\}$ et que $x_1 + \cdots + x_n = 1$. Démontreer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq n^2$$

et étudier les cas d'égalité.

⋆ **Exercice 9**
Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \ldots, a_n$ des réels distincts. On pose, pour $P, Q \in E$,

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k).$$

1. Vérifier que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormée de E.
3. Déterminer la distance de $Q \in E$ au sous espace

$$H = \left\{ P \in E \,\middle|\, \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \right\}.$$

⋆ **Exercice 10**
Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire suivant

$$\left\langle a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3\right\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

On pose H l'hyperplan $H = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$.
1. Déterminer une base de H.
2. Déterminer une base orthonormale de H.
3. En déduire la projection orthogonale de X sur H, puis la distance de X à H.