Exercice 1 (Question de cours)
Soit $a : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Donner (avec une preuve) l'ensemble des solutions sur I de l'équation

$$(E)\ y' + a(x)y = 0.$$

Exercice 2 (Question de cours)
Donner (et prouver) le résultat concernant le problème de Cauchy lié à une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Exercice 3 (Question de cours)
Donner (sans preuve) le résultat concernant le problème de Cauchy lié à une équation différentielle linéaire d'ordre 2.

Exercice 4
Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle I.

$$(E_1)\ (t\ln(t))y' + y = t,\ I =]1, +\infty[\qquad (E_2)\ t(ty' + y - t) - 1,\ I =]-\infty, 0[$$

Exercice 5
Montrer que l'équation différentielle

$$(E)\ t^2y' + 2ty = 1$$

n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6
Donner une équation différentielle dont les solutions sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{k+x}{1+x^2},\ k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7

1. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et telles que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(x) = f(0) + f(1).$$
2. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et telles que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(x) = \int_0^1 f(t)dt.$$

Exercice 8
On considère sur $I =]\infty, 0[$ l'équation différentielle

$$(E)\ x(xy' + y - x) = 1.$$

1. Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction f_1 définie par $f_1(x) = xf(x)$ est solution de l'équation différentielle
$$(E_1)\ y' = \frac{1}{x} + x.$$
2. Résoudre l'équation différentielle (E_1) puis l'équation (E) dans I.

Exercice 9
Trouver les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

1. $y'' - y' - 2y = 0$, avec $y(0) = 3$ et $y'(0) = 0$;
2. $y'' - 4y' + 4y = 0$, avec $y(0) = 3$ et $y'(0) = -4$;
3. $y'' - 2y' + 5y = 0$, avec $y(0) = -1$ et $y'(0) = 3$.

Exercice 10
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(1+x)^2y'' + (1+x)y' - 2 = 0$ sur $I =]-1, +\infty[$;
2. $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$ sur $I =]0, +\infty[$.

Exercice 11
L'accroissement de la population P d'un pays est proportionnel à cette population. La population double tous les 50 ans. En combien de temps triple-t-elle ?

Exercice 12
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et vérifiant, pour tous $s, t \in \mathbb{R}$,

$$f(s+t) = f(s)f(t).$$

Exercice 13
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) + f(-x) = e^x.$$