Exercice 1 (Cours)
Donner (et prouver) la reformulation de la définition d'une famille liée.

Exercice 2 (Cours)
Rappeler (et prouver) la "condition suffisante pour avoir une famille liée".

Exercice 3 (Cours)
Donner (et prouver) la caractérisation des bases en dimension finie.

Exercice 4
Montrer que les vecteurs

$$u_1 = (0, 1, 1),\ u_2 = (1, 0, 1),\ u_3 = (1, 1, 0)$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$. Donner les coordonnées du vecteur

$$u = (1, 1, 1)$$

dans cette base.

Exercice 5
On note $\mathcal{F}([-1, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et on note E le sous-ensemble de $\mathcal{F}([-1, 1], \mathbb{R})$ composé des fonctions continues qui sont affines sur $[-1, 0]$ et sur $[0, 1]$.

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([-1, 1], \mathbb{R})$.
2. Donner une base de E. Quelle est la dimension de E ?

Exercice 6
Soient F et G les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\right\} \text{ et } G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3) \mid 2x - y + 2z = 0\right\}.$$

1. Donner une base de F, une base de G, et en déduire leur dimension respective.
2. Donner une base de $F \cap G$, et donner sa dimension.
3. Montrer que la famille constituée des vecteurs des bases de F et G est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. Est-elle libre ?
4. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 7
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^5$ de dimension 3. Montrer que

$$F \cap G \neq \{0\}.$$

Exercice 8
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que deux quelconques des trois propriétés suivantes entraînent la troisième :

(i) $F \cap G = \{0\}$;
(ii) $F + G = E$;
(iii) $\dim F + \dim G = \dim E$.

Exercice 9
Soit

$$E = \mathbb{R}_4[X]$$

et $a, b \in \mathbb{R}$ deux réels distincts. On désigne par F l'ensemble des polynômes de E dont a et b sont racines.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Donner une base de F. Quelle est sa dimension ?

Exercice 10
Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ composé des suites arithmétiques à valeurs réelles.

1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Quelle est sa dimension ?

Exercice 11
Soit

$$F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(\alpha) = 0\}.$$

1. Démontrer que
$$\mathcal{B} = \left\{(X - \alpha)X^k \mid 0 \leq k \leq n - 1\right\}$$
est une base de F.
2. Quelle est la dimension de F ?
3. Donner les coordonnées de $(X - \alpha)^n$ dans cette base.

Exercice 12
Pour $E = \mathbb{R}^4$, dire si les familles de vecteurs suivantes peuvent être complétées en une base de E. Si oui, le faire.

1. (u, v, w) avec $u = (1, 2, -1, 0)$, $v = (0, 1, -4, 1)$, et $w = (2, 5, -6, 1)$;
2. (u, v, w) avec $u = (1, 0, 2, 3)$, $v = (0, 1, 2, 3)$ et $w = (1, 2, 0, 3)$;
3. (u, v) avec $u = (1, -1, 1, -1)$ et $v = (1, 1, 1, 1)$.