

EXERCICE 1 (Cours)

Donner et prouver la caractérisation de la continuité et de la dérivabilité par les développements limités.

EXERCICE 2 (Cours)

Rappeler et prouver le résultat concernant l'unicité d'un développement limité.

EXERCICE 3 (Cours)

Rappeler et prouver la formule de Taylor-Young.

EXERCICE 4

Calculer les développements limités suivants.

1. $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0
2. $\sin(x) \cos(2x)$ à l'ordre 6 en 0
3. $\cos(x) \ln(1+x)$ à l'ordre 4 en 0
4. $(\ln(1+x))^2$ à l'ordre 4 en 0
5. $\exp(\sin(x))$ à l'ordre 3 en 0
6. $\sin^6(x)$ à l'ordre 9 en 0

EXERCICE 5

Calculer les développements limités suivants.

1. $\frac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4 en 0
2. $\frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$ à l'ordre 3 en 0
3. $\frac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$ à l'ordre 2 en 0
4. $\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$ à l'ordre 2 en 0

EXERCICE 6

Déterminer la position relative de la courbe de la fonction

$$f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$$

et de sa tangente au voisinage des points d'abscisse 0 et 1.

EXERCICE 7

Déterminer les limites (si elles existent) en 0 des fonctions suivantes.

$$f : x \mapsto \frac{\sin x - x}{x^2} \quad g : x \mapsto \frac{\sin x - x}{x^3} \quad h : x \mapsto \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$$

EXERCICE 8

On considère la fonction donnée par

$$f : x \mapsto x\sqrt{1+x^2}.$$

Trouver une parabole asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$, et préciser la position relative de la courbe et de l'asymptote.

EXERCICE 9

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x}.$$

1. Donner un développement limité de f à l'ordre 3 en 0.
2. En déduire que la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse 0, dont on précisera une équation.
3. Prouver que la courbe traverse la tangente en 0.

EXERCICE 10

Calculer les développements limités suivants.

1. $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4 en 0
2. $\exp(\sin x)$ à l'ordre 4 en 0
1. $(\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5 en 0
2. $\ln(\cos x)$ à l'ordre 6 en 0

EXERCICE 11

Calculer les développements limités suivants.

1. $\arccos(x)$ à l'ordre 5 en 0
2. $\int_0^x e^{t^2} dt$ à l'ordre 5 en 0

EXERCICE 12

Calculer les développements limités suivants.

1. \sqrt{x} à l'ordre 3 en 1
2. $\exp(\sqrt{x})$ à l'ordre 3 en 1
3. $\ln(\sin x)$ à l'ordre 3 en $\pi/3$