

★ **EXERCICE 1** (Cours)

Donner et prouver la propriété sur le cardinal d'une réunion disjointe.

★ **EXERCICE 2** (Cours)

Donner et prouver la propriété sur le cardinal de l'ensemble  $\mathcal{P}(E)$  des parties d'un ensemble  $E$ .

★ **EXERCICE 3** (Cours)

Donner et prouver la formule de Pascal.

★ **EXERCICE 4**

On place dans le plan  $n \geq 3$  droites en position "générique", c'est-à-dire que deux droites ne sont jamais parallèles, et trois droites ne sont jamais concourantes. Combien de triangles a-t-on ainsi tracé ?

★ **EXERCICE 5**

Une course oppose 20 personnes, dont Alice.

1. Combien y a-t-il de podiums possibles ?
2. Combien y a-t-il de podiums possibles où Alice est première ?
3. Combien y a-t-il de podiums possibles dont Alice fait partie ?
4. On souhaite récompenser les 3 premières personnes en leur offrant un prix identique à chacune. Combien y a-t-il de distributions de récompenses possibles ?

★ **EXERCICE 6**

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes<sup>1</sup>. Combien de tirages différents peut-on obtenir :

1. sans imposer de contraintes sur les cartes;
2. contenant 5 carreaux ou 5 piques;
3. contenant 2 carreaux et 3 piques;
4. contenant au moins un roi;
5. contenant au plus un roi;
6. contenant exactement 2 rois et exactement 3 piques.

<sup>1</sup>Si la composition d'un jeu de 32 cartes n'est pas très claire pour vous, dites le tout de suite !

★ **EXERCICE 7**

On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques, 6 livres de physique et 3 de chimie. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement

1. si les livres doivent être groupés par matières;
2. si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.

★ **EXERCICE 8**

De combien de façons différentes peut-on placer  $p$  tours sur un échiquier de taille  $n \times n$  de façon à ce qu'elles ne puissent pas se prendre ?

★ **EXERCICE 9**

Combien existe-t-il de partitions d'un ensemble de cardinal  $np$  en  $n$  parties de cardinal  $p$  ?

★ **EXERCICE 10**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Prouver l'égalité

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

via un dénombrement.

★ **EXERCICE 11**

Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n \geq 1$ . Démontrer que le nombre de parties de  $E$  de cardinal pair vaut  $2^{n-1}$ .

★ **EXERCICE 12**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Prouver l'égalité

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

via un dénombrement.

★ **EXERCICE 13**

Combien y a-t-il de mots de passe où on impose

1. au plus 8 caractères, tous en minuscules;
2. exactement 8 caractères minuscules, mais les lettres ne doivent pas se répéter;
3. des lettres minuscules ou majuscules pour les 5 premiers caractères et des chiffres pour les 3 derniers caractères.