Exercice 1 (Démonstration de cours)
Rappeler et démontrer le résultat concernant la comparaison entre module et partie réelle et imaginaire.

Exercice 2 (Démonstration de cours)
Rappeler et démontrer l'inégalité triangulaire.

Exercice 3 (Démonstration de cours)
Rappeler l'expression des racines n-ième de l'unité, et démontrer le résultat.

Exercice 4
Développer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Exercice 5
Linéariser $\cos^4(x)$.

Exercice 6
Déterminer les racines carrées de $z = 16 + 30i$.

Exercice 7
Résoudre $z^2 + (1 - i)z - 4 - 8i = 0$.

Exercice 8
Écrire sous forme algébrique les nombres suivants

$$a = \frac{1}{3i} \qquad b = \frac{1}{1+i} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{3}+i\sqrt{2}} \qquad d = \frac{1}{3i-\sqrt{3}} \qquad e = \frac{2i-\sqrt{2}}{3+i}$$

$$f = (2+2i)^6 \qquad g = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} \qquad h = \frac{(1+i)^{2000}}{(i-\sqrt{3})^{1000}}$$

Exercice 9
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue z. On mettra les solutions sous forme algébrique.

$$(E) : iz + 3(z - i) = 0 \qquad (F) : (2i + 1)z = 1 + i - 2iz \qquad (G) : z = \frac{\bar{z}}{2}$$

Exercice 10
Trouver les ensembles de nombres z dans $\mathbb{C}$ tels que

$$(a)\ z = \bar{z} \qquad (b)\ z = -\bar{z} \qquad (c)\ z = i\bar{z} \qquad (d)\ z = -i\bar{z} \qquad (e)\ z^2 = z \times \bar{z}$$

Exercice 11
Soit $z \neq 0$ un nombre complexe.

1. Prouver que $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{\bar{z}}$ est un nombre réel.
2. Prouver que $\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{\bar{z}}$ est un nombre imaginaire pur.

Exercice 12
Soient A, B et C trois points d'affixe respective $a = 4 + i$, $b = 1 + 3i$ et $c = 4 - \frac{5}{2}i$.

1. Calculer la longueur AB.
2. Le point C appartient-il au cercle de centre A passant par B ?

Exercice 13
Déterminer les racines quatrièmes de i et les racines cubiques de $-\dfrac{8\sqrt{2}}{1+i}$.

Exercice 14
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

$$(a)\ z^2 - (6 + i)z + (11 + 13i) = 0 \qquad (b)\ z^2 + (4 - 3i)z = 2 + 8i$$

$$(c)\ z^2 - 5z + 4 + 10i = 0 \qquad (d)\ z^2 + 5z + 7 - i = 0$$

Exercice 15
On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante

$$(4z^2 - 20z + 37)(2z - 7 + 2i) = 0.$$

Démontrer que les solutions de cette équation sont les affixes de points appartenant à un même cercle, dont le centre est le point d'affixe 2.

Exercice 16
Dans chaque cas, donner une condition nécessaire et suffisante sur z pour que

1. les points d'affixes 1, z et z^2 soient alignés;
2. les vecteurs d'affixes z et $\bar{z}$ soient orthogonaux;
3. les points d'affixes z, $\frac{1}{z}$ et $z - 1$ soient situés sur un même cercle de centre O.

Exercice 17
Donner la forme trigonométrique et exponentielle des nombres complexes suivants.

$$z_1 = 3i \qquad z_2 = -2 \qquad z_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_4 = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \qquad z_5 = \pi i \qquad z_6 = 6\sqrt{3} + 6i$$

Exercice 18
Déterminer de deux façons différentes les racines carrées de $Z = \sqrt{3} + i$. En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 19
Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\pi/2} \cos^4(t)\sin^2(t)$.

Si vous voulez m'écrire : edouard.rousseau@uvsq.fr