Exercice 1 (Cours)
Donner et prouver la caractérisation du *plus grand commun diviseur* (pgcd) par des entiers premiers entre eux.

Exercice 2 (Cours)
Donner et prouver le lien entre *plus grand commun diviseur* (pgcd) et *plus petit commun multiple* (ppcm).

Exercice 3 (Cours)
Donner et prouver le résultat concernant l'existence d'un diviseur premier.

Exercice 4
Déterminer les entiers relatifs n tels que $n-4$ divise $3n-17$.

Exercice 5
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier et

$$S = \sum_{j=1}^{n} j.$$

Déterminer le reste de la division euclidienne de S par n.

Exercice 6
Soient $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que $a+b$ et $a \times b$ sont des entiers. Prouver que a et b sont des entiers.

Exercice 7
Montrer que l'équation

$$(E): \; x^3 - x^2 + x + 1 = 0$$

n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 8
Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ deux entiers premiers entre eux tels que leur produit ab est un carré parfait, *i.e.* il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $ab = k^2$. Montrer que a et b sont deux carrés parfaits.

Exercice 9 (Nombres de Mersenne)
Soit $a, n \geq 2$ des entiers.

1. Montrer que si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier.
2. On note $M_n = 2^n - 1$ le n-ième nombre de Mersenne. Vérifier que M_{11} n'est pas premier.

Exercice 10
Soit $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $10 \leq n \leq 120$. Démontrer que n est premier si et seulement s'il existe un entier $a \in \mathbb{Z}$ tel que

$$an \equiv 1\,[210]\,.$$

Exercice 11
Démontrer que la somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par 9.

Exercice 12
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$(n+1) \mid \binom{2n}{n}.$$

Exercice 13
Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier.

1. Montrer que, pour tout $k \in \{1, \ldots, p-1\}$, on a
$$p \mid \binom{p}{k}.$$
2. En déduire que pour tout $a, b \in \{0, \ldots, p-1\}$, on a
$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p\,[p]\,.$$
3. Déduire également de la première question une preuve du petit théorème de Fermat : si $n \geq 1$ et p est premier, alors
$$n^p \equiv n\,[p]\,.$$

Exercice 14
On dit qu'un nombre est *palindrome* s'il se lit de la même manière de gauche à droite ou de droite à gauche. Par exemple les nombres 2002 ou 12321 sont des nombres palindromes. Prouver qu'un nombre palindrome ayant un nombre pair de chiffres est divisible par 11.