Exercice 1 (Question de cours.)
Donner l'énoncé ainsi que la démonstration du résultat de cours concernant la somme de n variables mutuellement indépendantes suivant la même loi de Bernoulli.

Exercice 2 (Question de cours.)
Donner l'énoncé ainsi que la démonstration de la caractérisation de la loi géométrique comme loi sans mémoire.

Exercice 3 (Question de cours.)
Donner l'énoncé ainsi que la démonstration du résultat de cours concernant la somme de deux variables indépendantes suivante chacune une loi de Poisson.

Exercice 4 (Exercice préparé.)
Soit X une variable aléatoire vérifiant $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ de fonction génératrice

$$G_X(t) = ae^{1+t^2}.$$

1. Déterminer a.
2. Déterminer la loi de X.
3. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exercice 5 (Exercice préparé.)
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$, et Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit $Z = XY$.

1. Déterminer la loi de Z.
2. Calculer l'espérance et la variance de Z.
3. Calculer la fonction génératrice de Z, et donner le rayon de convergence de la série génératrice.
4. Retrouver l'espérance et la variance de Z gâce à la fonction génératrice.

Exercice 6
On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut p. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir r fois pile (en tout). Quelle est la loi de X ?

Exercice 7
Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?

Exercice 8
Un concierge rentre d'une soirée. Il dispose de n clefs dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais il ne sait plus laquelle.

1. Il essaie les clefs les unes après les autres en éliminant après chaque essai la clef qui n'a pas convenu. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la clef.
2. En réalité le concierge est très fatigué, et après chaque essai, il remet la clef essayée dans le trousseau. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.

Exercice 9
On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est $2/3$, et donc celle d'obtenir face est $1/3$. Les lancers sont supposés indépendants, et on note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs. Pour $n \geq 1$, on note p_n la probabilité $P(X = n)$.

1. Expliciter les événements $(X = 2), (X = 3), (X = 4)$, et déterminer la valeur de p_2, p_3, p_4.
2. Montrer que l'on a
$$p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1} \text{ pour } n \geq 4.$$
3. En déduire l'expression de p_n pour tout n.
4. Rappeler, pour $-1 < q < 1$, l'expression de $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n$, et calculer $E(X)$ l'espérance de X. Interpréter.

Exercice 10
Soit $0 < p < 1$. On dispose d'une pièce amenant “pile” avec la probabilité p. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois “pile”. Soit X le nombre de “face” obtenus au cours de cette expérience.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que X admet une espérance, et la calculer.

On procède à l'expérience suivante : si X prend la valeur n, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on tire ensuite une boule dans cette urne. On note alors Y le numéro obtenu.

3. Déterminer la loi de Y. Calculer l'espérance de Y.
4. On pose $Z = X - Y$. Donner la loi de Z et vérifier que Z et Y sont indépendantes.