Exercice 1 (Questions de cours.)
Donner l'énoncé ainsi que la démonstration des résultats suivants.

1. Conditions équivalentes à la continuité d'une application linéaire.
2. Convergence ou divergence d'une série de Riemann.
3. Règle de d'Alembert.

Exercice 2 (Exercice préparé.)
Pour $P \in \mathbb{R}_[X]$ un polynôme, on pose

$$N_1(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)|.$$

On admet que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$ et on considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$P_n(X) = \frac{1}{n}X^n.$$

1. La suite (P_n) converge-t-elle pour N_1 ?
2. La suite (P_n) converge-t-elle pour N_2 ?
3. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice 3
Soit N et N' deux normes sur E. On suppose $B(0,1) \subset B'(0,1)$. Montrer

$$\forall x \in E,\ N'(x) \leq N(x).$$

Exercice 4
Soit E un espace vectoriel normé. Soit F un sous-espace de E, contenant une boule ouverte de rayon $R > 0$. Montrer que $F = E$.

Exercice 5
Soit (u_n) une suite de nombres réels.

1. On suppose que u est croissante et admet une suite extraite convergente. Que dire de u ?
2. On suppose que u est croissante et admet une suite extraite majorée. Que dire de u ?
3. On suppose que u n'est pas majorée. Montrer qu'elle admet une suite extraite qui diverge vers $+\infty$.

Exercice 6
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que pour tout $x \geq 0$

$$|f(x)| \leq \alpha x + \beta.$$

Exercice 7
Une suite (u_n) est appelée suite de Cauchy si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N$, on a

$$|u_p - u_q| < \varepsilon.$$

1. Montrer que toute suite convergente est une suite de Cauchy.
2. On souhaite désormais montrer la réciproque. Soit (u_n) une suite de Cauchy.
   (a) Montrer que (u_n) est bornée.
   (b) On suppose que (u_n) admet une suite extraite convergente. Montrer que (u_n) est convergente.
   (c) Conclure.

Exercice 8
Soit E une partie compacte d'un espace vectoriel normé, et $f : E \to E$ une fonction continue vérifiant

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x \neq y \Rightarrow ||f(x) - f(y)|| < ||x - y||.$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe, que l'on notera α.
2. Le résultat subsiste-il si on suppose simplement E fermé ?

Exercice 9
Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1) $u_n = \dfrac{n}{n^3+1}$ 2) $u_n = \dfrac{1}{n!}$ 3) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$

4) $u_n = n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 5) $u_n = \dfrac{n!}{n^{an}}$, $a \in \mathbb{R}$ 6) $u_n = \dfrac{\ln(n^n)}{n!}$

Exercice 10
Soit, pour $n \geq 1$ et $a > 0$, la suite $u_n = \dfrac{a^n n!}{n^n}$.

1. Étudier la convergence de la série $\sum u_n$ lorsque $a \neq e$.
2. Lorsque $a = e$, prouver que, pour n assez grand, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$. Que dire de la nature de la série $\sum u_n$?