Exercice 1 (Questions de cours.)
Donner l'énoncé ainsi que la démonstration des résultats suivants.

1. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$, avec le cas d'égalité.
2. Une boule ouverte est un ouvert.
3. Conditions équivalentes à la continuité d'une application linéaire.

Exercice 2 (Exercice préparé.)
On se place dans l'espace vectoriel normé $M_n(\mathbb{C})$. On considère l'ensemble $GL_n(\mathbb{C})$ des matrices inversibles.

1. L'ensemble $GL_n(\mathbb{C})$ est-il ouvert ? Quel est son intérieur ?
2. L'ensemble $GL_n(\mathbb{C})$ est-il fermé ? Quelle est son adhérence ?
3. L'ensemble $GL_n(\mathbb{C})$ est-il borné ?

Exercice 3
Soit N et N' deux normes sur E. On suppose $B(0,1) \subset B'(0,1)$. Montrer

$$\forall x \in E,\, N'(x) \leq N(x).$$

Exercice 4
Soit E un espace vectoriel normé. Soit F un sous-espace de E, contenant une boule ouverte de rayon $R > 0$. Montrer que $F = E$.

Exercice 5
Soit (u_n) une suite de $(\mathbb{R}^m, ||\cdot||_\infty)$ telle que chacune des suites composantes admet une valeur d'adhérence. La suite u admet-elle une valeur d'adhérence ?

Exercice 6
Soit (u_n) une suite de nombres réels.

1. On suppose que u est croissante et admet une suite extraite convergente. Que dire de u ?
2. On suppose que u est croissante et admet une suite extraite majorée. Que dire de u ?
3. On suppose que u n'est pas majorée. Montrer qu'elle admet une suite extraite qui diverge vers $+\infty$.

Exercice 7
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et A, B deux parties de E. On note

$$A + B = \{a + b \,|\, (a,b) \in A \times B\}.$$

1. Si A est ouvert (et B quelconque), montrer que $A + B$ est ouvert.
2. Si A est compact et B fermé, montrer que $A + B$ est fermé. Est-ce vrai si A est seulement supposé fermé ?
3. Si A et B sont compactes, montrer que $A + B$ est compacte.

Exercice 8
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que pour tout $x \geq 0$

$$|f(x)| \leq \alpha x + \beta.$$

Exercice 9
Une suite (u_n) est appelée suite de Cauchy si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N$, on a

$$|u_p - u_q| < \varepsilon.$$

1. Montrer que toute suite convergente est une suite de Cauchy.
2. On souhaite désormais montrer la réciproque. Soit (u_n) une suite de Cauchy.
   (a) Montrer que (u_n) est bornée.
   (b) On suppose que (u_n) admet une suite extraite convergente. Montrer que (u_n) est convergente.
   (c) Conclure.

Exercice 10
Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé E contenu dans la boule unité ouverte. Démontrer qu'il existe $r < 1$ tel que K soit contenue dans $\bar{B}(0,r)$, la boule fermée de centre 0 et de rayon r.

Exercice 11
Soit E une partie compacte d'un espace vectoriel normé, et $f : E \to E$ une fonction continue vérifiant

$$\forall (x,y) \in E^2,\, x \neq y \Rightarrow ||f(x) - f(y)|| < ||x - y||.$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe, que l'on notera α.
2. Le résultat subsiste-il si on suppose simplement E fermé ?

Exercice 12
Soit E un espace vectoriel normé et (K_n) une suite de parties compactes de E, non vides, telle que, pour chaque entier n, on a $K_{n+1} \subset K_n$. On pose $K = \bigcap_{n \geq 1} K_n$.

1. Démontrer que $K \neq \emptyset$.
2. Soit U un ouvert contenant K. Démontrer qu'il existe un entier n tel que $K_n \subset U$.