Exercice 1 (Questions de cours.)
Donner l'énoncé ainsi que la démonstration des résultats suivants.

1. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$, avec le cas d'égalité.
2. Que peut-on dire de N_2 sur $\mathbb{R}^n$?
3. Prouver que toute suite convergente est bornée.

Exercice 2 (Exercice préparé.)
Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. En faisant une division euclidienne, donner une relation entre A^n, A^2, A, et I_3.

Exercice 3
Justifier si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si $(E, ||\cdot||)$ est un espace vectoriel normé, $x \in E$, $r > 0$, et $B(x,r)$ est la boule de centre x et de rayon r, alors pour tout $\lambda > 0$, $\lambda B(x,r) = B(x, \lambda r)$.
2. $N : (x,y) \mapsto |5x + 3y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé, et x, y deux vecteurs de E tels que $||x+y|| = ||x|| + ||y||$. Alors $x \in \operatorname{Vect} y$.
4. Soit $E = \mathbb{R}_1[X]$, alors $N : P \mapsto |P(0)| + |P(1)|$ est une norme sur E.
5. Si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur E, et si on note B_1 (resp. B_2) la boule unité pour N_1 (resp. N_2), alors il existe a, b tels que $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.
6. Une suite (u_n) de l'espace vectoriel normé $(E, ||\cdot||)$ converge si et seulement si toute suite extraite de (u_n) converge.

Exercice 4
Soit E un espace vectoriel normé. Soit $a, b \in E$ et $r, s > 0$. Montrer que

$$B(a,r) + B(b,s) = B(a+b, r+s).$$

Exercice 5
Soit N et N' deux normes sur E. On suppose $B(0,1) \subset B'(0,1)$. Montrer

$$\forall x \in E,\ N'(x) \leq N(x).$$

Exercice 6
Soit E un espace vectoriel normé. Soit F un sous-espace de E, contenant une boule ouverte de rayon $R > 0$. Montrer que $F = E$.

Exercice 7
Pour tous réels $x, y \in \mathbb{R}$, on pose

$$N(x,y) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x + ty|.$$

Montrer que N est une norme. Représenter la boule unité fermée de centre O.

Exercice 8
Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E. On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Démontrer que N est une norme sur E.

Exercice 9
Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ des réels et $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$N(x_1, \dots, x_n) = a_1|x_1| + \cdots + a_n|x_n|.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les a_k pour que N soit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 10
Soit E l'ensemble des suites réelles bornées. On rappelle que $N(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ définit une norme sur E. On définit

$$N'(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (|u_n| + |u_{2n}|).$$

1. Montrer que N' est une norme sur E.
2. Montrer que N et N' sont équivalentes et donner les valeurs optimales α et β telles que
$$\alpha N \leq N' \leq \beta N.$$

Exercice 11
Soit (u_n) une suite de $(\mathbb{R}^m, ||\cdot||_\infty)$ telle que chacune des suites composantes admet une valeur d'adhérence. La suite u admet-elle une valeur d'adhérence ?

Exercice 12
Soit (u_n) une suite de nombres réels.

1. On suppose que u est croissante et admet une suite extraite convergente. Que dire de u ?
2. On suppose que u est croissante et admet une suite extraite majorée. Que dire de u ?
3. On suppose que u n'est pas majorée. Montrer qu'elle admet une suite extraite qui diverge vers $+\infty$.