Exercice 1 (Questions de cours.)
Donner l'énoncé complet ainsi que la démonstration des résultats suivants.

1. Règle de d'Alembert.
2. Convergence absolue d'une série exponentielle.
3. Critère des séries alternées.

Exercice 2 (Exercice préparé.)
Donner un équivalent losque $n \to +\infty$ de

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Exercice 3
Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1) $u_n = \dfrac{n}{n^3+1}$ 2) $u_n = \dfrac{1}{n!}$ 3) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$

4) $u_n = n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 5) $u_n = \dfrac{n!}{n^{an}}$, $a \in \mathbb{R}$ 6) $u_n = \dfrac{\ln(n^n)}{n!}$

Exercice 4
Soit, pour $n \geq 1$ et $a > 0$, la suite $u_n = \dfrac{a^n n!}{n^n}$.

1. Étudier la convergence de la série $\sum u_n$ lorsque $a \neq e$.
2. Lorsque $a = e$, prouver que, pour n assez grand, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$. Que dire de la nature de la série $\sum u_n$?

Exercice 5
Étudier la nature des séries $\sum u_n$ suivantes

1) $u_n = \dfrac{\sin(n^2)}{n^2}$ 2) $u_n = \dfrac{(-1)^n \ln(n)}{n}$ 3) $u_n = \dfrac{\cos(n^2\pi)}{n\ln(n)}$

Exercice 6
Soit $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n}\int_0^1 t^n f(t)dt$$

est convergente.

Exercice 7
Soit $a > 0$ et $f : x \mapsto \dfrac{a}{a^2+x^2}$.

1. Prouver que f est décroissante et donner une primitive de f.
2. En déduire

$$\lim_{a\to\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2+k^2}.$$

Exercice 8
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ un point du plan. En fonction de la position de (x,y), étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{x^n}{y^n+n}.$$

Exercice 9
Calculer les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}$ 2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!}$ 3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}$

Exercice 10
Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs et $\alpha > 0$ un réel.

1. On suppose que $\sum_n u_n$ converge.
   (a) On suppose que $\alpha > 1$, prouver que $\sum_n u_n^\alpha$ converge.
   (b) Est-ce vrai si $\alpha < 1$?
2. On suppose que $\sum_n u_n$ diverge.
   (a) On suppose que $\alpha < 1$, prouver que $\sum_n u_n^\alpha$ diverge.
   (b) Est-ce vrai si $\alpha > 1$?

Exercice 11
Soit (u_n) une suite à terme positifs et décroissante. Si la série $\sum_n u_n$ converge, montrer que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 12
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $\lim_{x\mapsto+\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$. Montrer que $\sum_n f(n)$ converge et donner un équivalent lorsque $n \to +\infty$, de

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k).$$