Exercice 1 (Questions de cours.)
Donner l'énoncé complet ainsi que la démonstration des résultats suivants.

1. Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale et inégalité de Bessel.
2. Lemme d'Abel.
3. Lemme concernant $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n n a_n z_n$. À quoi sert ce lemme ?

Exercice 2 (Exercice préparé.)
On pose, $\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2$, $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^t B)$. Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ celui des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont supplémentaires orthogonaux de $M_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice quelconque, calculer la distance de M à $\mathcal{S}_n$.
4. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculer la distance de M à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 3
Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$a)\ \sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} x^n \qquad b)\ \sum_n \frac{n!}{(2n)!} x^n \qquad c)\ \sum_n \frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}} x^n$$

$$d)\ \sum_n \ln(n) x^n \qquad e)\ \sum_n \frac{\sqrt{n} x^{2n}}{2^n + 1} \qquad f)\ \sum_n \frac{(-1)^n}{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)} x^n$$

Exercice 4
Soit $(a_n)_n$ une suite.

1. Supposons que $\sum_n a_n x^n$ a un rayon de convergence $\rho > 0$. Montrer que $\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.
2. On suppose maintenant que $\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$ a pour rayon de convergence $\rho > 0$. Que peut-on dire du rayon de convergence de $\sum_n a_n x^n$?

Exercice 5
Soit f la somme de la série entière $\sum_n a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Démontrer que f est paire si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1} = 0$.

Exercice 6
Soit f la somme d'une série entière de rayon de convergence non nul. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[$, $f(x) = 0$. Prouver que f est identiquement nulle.

Exercice 7
On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des séries entières (à coefficients complexes) de rayon de convergence supérieur ou égal à 1. L'ensemble $\mathcal{A}$, muni de l'addition et du produit de Cauchy, forme un anneau. Prouver que $\mathcal{A}$ est intègre.

Exercice 8
Développer en série entière les expressions suivantes :

$$a)\ \ln(1+2x^2) \qquad b)\ \frac{1}{a-x} \text{ avec } a \neq 0 \qquad c)\ \ln(a+x) \text{ avec } a > 0$$

$$d)\ \frac{e^x}{1-x} \qquad e)\ \ln(1+x-2x^2) \qquad f)\ (4+x^2)^{-3/2}$$

Exercice 9
Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer la somme en terme de fonctions usuelles :

$$a)\ \sum_n \frac{n-1}{n!} x^n \qquad b)\ \sum_n \frac{n+2}{n+1} x^n \qquad c)\ \sum_n \frac{(n+1)(n+2)}{n!} x^n$$

$$d)\ \sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n} \qquad e)\ \sum_n \frac{n^3}{n!} x^n \qquad f)\ \sum_n \frac{x^{2n}}{2n+1}$$

Exercice 10 (Nombre de dérangements)
Pour tous les entiers k et n tels que $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, on note $D_{n,k}$ le nombre de bijections (ou permutations) σ de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ ayant k points fixes, *i.e.* telles que

$$\mathrm{Card}\,\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \sigma(i) = i\} = k.$$

On pose $D_{0,0} = 1$ et $d_n = D_{n,0}$ le nombre de *dérangements*, *i.e.* le nombre de permutations sans point fixe.

1. Dresser la liste des permutations de $\{1,2,3\}$ et en déduire $D_{3,0}, D_{3,1}, D_{3,2}, D_{3,3}$.
2. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^n D_{n,k}$.
3. Montrer que $D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k,0}$
4. Montrer que la série entière $\sum_n \frac{d_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
5. On pose $f(x) = \sum_n \frac{d_n}{n!} x^n$. Montrer que $e^x f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$.
6. En déduire que $d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^n}{k!}$.
7. Soit p_n la probabilité qu'une permutation prise au hasard soit un dérangement. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$?