Exercice 1 (Questions de cours.)
Donner l'énoncé complet ainsi que la démonstration des résultats suivants.

1. Lemme d'Abel.
2. Règle de d'Alembert.
3. Lemme concernant $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n n a_n z_n$. À quoi sert ce lemme ?

Exercice 2 (Exercice préparé.)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$$

1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq \frac{u_n}{n!} \leq 4^{n+1}.$$
2. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$, montrer que f est solution de l'équation $y' = y^2$.
3. Résoudre cette équation différentielle et en déduire la valeur de u_n.

Exercice 3
Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$a)\ \sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$ $\quad b)\ \sum_n \frac{n!}{(2n)!} x^n$ $\quad c)\ \sum_n \frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}} x^n$

$d)\ \sum_n \ln(n) x^n$ $\quad e)\ \sum_n \frac{\sqrt{n} x^{2n}}{2^n + 1}$ $\quad f)\ \sum_n \frac{(-1)^n}{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)} x^n$

Exercice 4
Soit $(a_n)_n$ une suite.

1. Supposons que $\sum_n a_n x^n$ a un rayon de convergence $\rho > 0$. Montrer que $\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.
2. On suppose maintenant que $\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$ a pour rayon de convergence $\rho > 0$. Que peut-on dire du rayon de convergence de $\sum_n a_n x^n$?

Exercice 5
Soit f la somme de la série entière $\sum_n a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Démontrer que f est paire si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1} = 0$.

Exercice 6
Soit f la somme d'une série entière de rayon de convergence non nul. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[$, $f(x) = 0$. Prouver que f est identiquement nulle.

Exercice 7
On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des séries entières (à coefficients complexes) de rayon de convergence supérieur ou égal à 1. L'ensemble $\mathcal{A}$, muni de l'addition et du produit de Cauchy, forme un anneau. Prouver que $\mathcal{A}$ est intègre.

Exercice 8
Développer en série entière les expressions suivantes :

$a)\ \ln(1+2x^2)$ $\quad b)\ \frac{1}{a-x}$ avec $a \neq 0$ $\quad c)\ \ln(a+x)$ avec $a > 0$

$d)\ \frac{e^x}{1-x}$ $\quad e)\ \ln(1+x-2x^2)$ $\quad f)\ (4+x^2)^{-3/2}$

Exercice 9
Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer la somme en terme de fonctions usuelles :

$a)\ \sum_n \frac{n-1}{n!} x^n$ $\quad b)\ \sum_n \frac{n+2}{n+1} x^n$ $\quad c)\ \sum_n \frac{(n+1)(n+2)}{n!} x^n$

$d)\ \sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n}$ $\quad e)\ \sum_n \frac{n^3}{n!} x^n$ $\quad f)\ \sum_n \frac{x^{2n}}{2n+1}$

Exercice 10 (Nombre de dérangements)
Pour tous les entiers k et n tels que $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, on note $D_{n,k}$ le nombre de bijections (ou permutations) σ de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ ayant k points fixes, *i.e.* telles que

$$\operatorname{Card}\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \sigma(i) = i\} = k.$$

On pose $D_{0,0} = 1$ et $d_n = D_{n,0}$ le nombre de *dérangements*, *i.e.* le nombre de permutations sans point fixe.

1. Dresser la liste des permutations de $\{1,2,3\}$ et en déduire $D_{3,0}, D_{3,1}, D_{3,2}, D_{3,3}$.
2. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$.
3. Montrer que $D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k,0}$
4. Montrer que la série entière $\sum_n \frac{d_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
5. On pose $f(x) = \sum_n \frac{d_n}{n!} x^n$. Montrer que $e^x f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$.
6. En déduire que $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{k!}$.
7. Soit p_n la probabilité qu'une permutation prise au hasard soit un dérangement. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$?