Exercice 1 (Questions de cours.)
Donner l'énoncé complet ainsi que la démonstration des résultats suivants.

1. Lien entre convergence normale et convergence uniforme.
2. Continuité en un point de la limite d'une suite de fonction.
3. Dérivabilité de la limite d'une suite de fonction.

Exercice 2 (Exercice préparé.)
Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

Étudier la convergence simple puis uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$ puis sur

$$I_a =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$$

avec $a > 0$.

Exercice 3 (Limite uniforme de polynômes sur $\mathbb{R}$.)
Soit (P_n) une suite de fonctions polynômes définies sur $\mathbb{R}$. On suppose que (P_n) converge uniformément vers une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

1. Prouver qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, et pour $x \in \mathbb{R}$,
$$|P_n(x) - P_N(x)| \leq 1$$
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = P_n - P_N$ est une fonction constante.
3. En déduire que la fonction f est une fonction polynôme.

Ce résultat est à comparer au théorème de Weierstrass qui dit que n'importe quelle fonction continue *sur un segment* est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Exercice 4
Soit $a \geq 0$. On définit la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^a x^n (1-x)$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement.
2. À quelle condition sur a a-t-on convergence uniforme ?

Exercice 5
Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$.

1. Démontrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Démontrer que la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Que montre cet exercice ?

Exercice 6 (Fonction zeta)
On appelle fonction ζ de Riemann la fonction de la variable réelle $s \in \mathbb{R}$ définie par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

1. Donner le domaine de définition de ζ, et démontrer qu'elle est strictement décroissante sur celui-ci.
2. Prouver que ζ est continue sur son domaine de définition.
3. Déterminer $\lim_{s\to+\infty} \zeta(s)$.
4. Montrer que pout entier $k \geq 1$ et tout $s > 0$, on a
$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}.$$
En déduire que $\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$ quand $s \to 1^+$.
5. Démontrer que ζ est convexe.

Exercice 7
On considère la série de fonction

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}.$$

1. Prouver que S est définie sur $I =]-1, +\infty[$.
2. Prouver que S est continue sur I.
3. Prouver que S est dérivable sur I, calculer sa dérivée et en déduire que S est croissante sur I.
4. Calculer la limite de S en -1 et en $+\infty$.

Exercice 8
Étudier la convergence simple et la convergence normale de la série de fonction $\sum f_n$ dans les cas suivants

1. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$ 2. $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n^3+x^3}$ 3. $f_n(x) = \dfrac{x}{n^3+x^3}$

1. sur $[0,+\infty[$, puis $[0,1]$, puis $[0,a]$ avec $a \in]0,1[$.
2. sur $[0,+\infty[$, puis sur $[0,a]$ avec $a > 0$.
3. sur $[0,+\infty[$.