Exercice 1 (Questions de cours.)
Donner l'énoncé ainsi que la démonstration des résultats suivants.

1. Donner le lemme de décomposition des noyaux.
2. Que peut-on dire au sujet du spectre et de la trigonalisation d'une matrice nilpotente ?
3. Que peut-on dire au sujet de la diagonalisation d'une matrice nilpotente ?

Exercice 2 (Exercice préparé.)
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par A.

Exercice 3
Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E tel que $\operatorname{rg} u = 1$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que u soit diagonalisable.
2. Si u n'est pas diagonalisable, prouver que $u^2 = 0$.

Exercice 4
Soit $a_1, \ldots, a_{n-1}$ et $b_1, \ldots, b_{n-1}$ des nombres réels, avec $n \geq 3$, et soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

1. Prouver que $\operatorname{rg} A \leq 2$.
2. Dans le cas où $\operatorname{rg} A \leq 1$, prouver que A est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.
3. Dans le cas $\operatorname{rg} A = 2$, trouver une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable. *Indication : on s'intéressera à la trace de A et A^2.*

Exercice 5
Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes qui commutent : $f \circ g = g \circ f$.

1. Prouver que tout sous-espace propre de f est stable par g.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par g. Prouver que si g est diagonalisable, alors $g_{|F}$, la restriction de g à F, est diagonalisable.
3. Prouver que si f et g sont diagonalisables, alors ils sont diagonalisables dans une même base.

Exercice 6
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. On suppose que f est inversible. Prouver que f^{-1} est un polynôme en f.

Exercice 7
Soit $\mathbb{K}$ un corps et $n \in \mathbb{N}^*$ un entier. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice et

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{K})$$

une matrice par blocs.

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. Prouver que $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

Exercice 8
Soit $m \in \mathbb{R}$ un nombre réel et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1. Quels sont les valeurs propres de A ?
2. Pour quelles valeurs de m la matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ dans le cas où $m = 2$.

Exercice 9

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ dans $M_n(\mathbb{C})$.

1. Soit $B \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable, prouver que pour tout $Q \in \mathbb{C}[X]$, $Q(B)$ est diagonalisable.
2. En exprimant A comme un polynôme en J, diagonaliser la matrice A.
3. Application : $n = 4$ et $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 2, 3, 4)$.