Exercice 1 (Questions de cours)
Donner l'énoncé ainsi que la démonstration des résultats suivants.

1. Que peut-on dire d'une famille de vecteurs propres $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ liés à des valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ deux à deux distinctes ?
2. Que peut-on dire à propos de la dimension des sous-espaces propres d'un endomorphisme u ?
3. Quel est le lien entre le polynôme caractéristique χ_u de u et les valeurs propres de u ?

Exercice 2
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + 2y, -y)$.

1. Prouver que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Quelle est la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$?
3. Est-ce que M est trigonalisable ? Diagonalisable ?
4. Diagonaliser M.

Exercice 3
Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Donner l'expression de f.
2. La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. Diagonaliser M.

Exercice 4
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner l'expression de f.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Diagonaliser A.

Exercice 5
Soit $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ l'endomorphisme défini par

$$\varphi : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Exercice 6
Expliquer sans calcul pourquoi la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

Exercice 7
Pour chaque application, donner sa matrice dans la base canonique.

1. $f : x \mapsto 2x$
2. $g : (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$
3. $h : (x, y) \mapsto (y - 2x, 3x + 2y)$
4. $t : (x, y, z) \mapsto (2x - 3x + z, x - y, y - z)$
5. $u : (x, y, z) \mapsto (y, z, x)$

Exercice 8
Dans chaque cas, donner l'expression de l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est la suivante

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 11 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$