Exercice 1 (Questions de cours.)
Donner l'énoncé complet ainsi que la démonstration des résultats suivants.

1. Lien entre endomorphisme symétrique et matrice symétrique.
2. Théorème spectral version 1 : réduction des endomorphismes symétriques.
3. Théorème spectral version 2 : espaces propres d'un endomorphisme symétrique.

Exercice 2 (Exercice préparé.)
Soit E un espace euclidien et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique de E.

1. On suppose que $\forall x \in E$, $\langle u(x), x\rangle = 0$. Montrer que $u = 0$.
2. Montrer l'équivalence
$$\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \lambda \geq 0.$$

Exercice 3 (Relations usuelles.)
Soit E un espace préhilbertien réel et A et B deux parties de E. Démontrer les relations suivantes.

1. $A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
2. $(A \cup B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$.
3. $A^{\perp} = \mathrm{Vect}(A)^{\perp}$.
4. $\mathrm{Vect}(A) \subset (A^{\perp})^{\perp}$.
5. On suppose que E est de dimension finie. Démontrer que $\mathrm{Vect}(A) = (A^{\perp})^{\perp}$.

Exercice 4 (Supplémentaire orthogonal ?)
On considère $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire
$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$
Soit $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$, montrer que $F^{\perp} = \{0\}$ et en déduire que F n'admet pas de supplémentaire orthogonal.

Exercice 5
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. Que vaut A ?

Exercice 6
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. La matrice $A + iI_n \in M_n(\mathbb{C})$ est-elle inversible ?

Exercice 7
Soit E un espace vectoriel euclidien, et soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes symétriques de E.

1. Démontrer que $\mathrm{Ker}(u) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(u) = E$.
2. Démontrer que $u \circ v$ est symétrique si et seulement si $u \circ v = v \circ u$.

Exercice 8
Soit E un espace euclidien de dimension n, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique de E. On note $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de u, comptées avec leur multiplicité. Démontrer que pour tout $x \in E$, on a
$$\lambda_1 ||x||^2 \leq \langle u(x), x\rangle \leq \lambda_n ||x||^2$$

Exercice 9
Soit E un espace préhilbertien et soit $u : E \to E$ une application telle que pour tous $x, y \in E$, on a
$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle .$$
Démontrer que u est linéaire.

Exercice 10
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Démontrer que la matrice $A^t A$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont des réels positifs.

Exercice 11
Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, $a \in E$ un vecteur unitaire de E, et $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel.

1. Démontrer que
$$f(x) = x + \lambda \langle x, a\rangle a$$
définit un endomorphisme symétrique de E.
2. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres correspondants.