Exercice 1 (Question de cours.)
Donner l'énoncé du théorème de convergence dominée.

Exercice 2 (Question de cours.)
Donner l'énoncé du théorème concernant la continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

Exercice 3 (Exercice préparé.)
Montrer que pour tout $p \geq 1$,

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)^p}{1-t} dt = (-1)^p p! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+1}},$$

en justifiant la convergence de l'intégrale et de la série. L'égalité est-elle encore vraie pour $p = 0$?

Exercice 4 (Exercice préparé.)
Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx} dt$ et $f(x,t) = \frac{e^{-t}}{1+tx}$.

1. Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa dérivée F'.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$.
4. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.
5. Calculer $F^{(n)}(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5
Étudier la nature des intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ 2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x \sin(x) e^{-x} dx$ 3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$

4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cosh(t) - \cos(t)}{t^{5/2}} dt$ 5) $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{t}\right) dt$ 6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin(1/t^2)}{\ln(1+t)} dt$

Exercice 6
Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, croissante, telle que l'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ converge.

1. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt.$$

2. (Application.) Montrer que pour tout nombre réel $\alpha > 0$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha-1} \sim \frac{n^\alpha}{\alpha} \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Exercice 7
Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, des suites suivantes.

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n}$ 2) $\displaystyle\int_0^1 f(t^n)dt$ avec $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue 3) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan(t)^n dt$

Exercice 8
Dans cet exercice on se propose de calculer l'intégrale de Gauss. On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

1. Montrer que F est définie et continue sur $[0,+\infty[$ et déterminer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
2. Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et démontrer que

$$F'(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

3. En intégrant F' sur $]0,+\infty[$, montrer que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 9
On appelle fonction Gamma la fonction définie par

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1. Montrer que Γ est définie sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que Γ est continue sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et calculer $\Gamma^{(k)}$.
4. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!.$$

5. Calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$.