Exercice 1 (Question de cours.)
Donner l'énoncé ainsi que la démonstration du résultat de cours concernant les intégrales de Riemann.

Exercice 2 (Question de cours.)
Donner l'énoncé ainsi que la démonstration du résultat de cours concernant les règles de comparaison pour des fonctions positives.

Exercice 3 (Exercice préparé.)
Préciser la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} dt.$$

Exercice 4 (Exercice préparé.)
On pose, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$,

$$I_{n,p} = \int_0^1 t^n (\ln(t))^p dt.$$

1. Justifier que pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, l'intégrale $I_{n,p}$ est convergente.
2. Calculer $I_{n,0}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Établir une relation de récurrence entre $I_{n,p}$ et $I_{n,p+1}$.
4. En déduire la valeur de $I_{n,p}$.

Exercice 5
Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge. Montrer que pour tout nombre réel $a > 0$, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^a} dt$$

converge.

Exercice 6
Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$1) \int_0^1 \frac{\cosh(t)-\cos(t)}{t^{5/2}} dt \qquad 2) \int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{t}\right) dt \qquad 3) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin(1/t^2)}{\ln(1+t)} dt$$

Exercice 7
Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, croissante, telle que l'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ converge.

1. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt.$$
2. (Application.) Montrer que pour tout nombre réel $\alpha > 0$, on a
$$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha-1} \sim \frac{n^\alpha}{\alpha} \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Exercice 8
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx.$$

Justifier l'existence de I_n, puis calculer sa valeur par récurrence.

Exercice 9
Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$1) \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \qquad 2) \int_0^{+\infty} x\sin(x)e^{-x} dx \qquad 3) \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$$

Exercice 10
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, et soit (x_n) et (y_n) deux suites tendant vers $+\infty$.

1. Démontrer que $\int_{x_n}^{y_n} f(t)dt$ vers 0.
2. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t\sin t}dt$ diverge.

Exercice 11
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable.

1. Démontrer que, pour tout $A > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \geq A$ tel que $|xf(x)| \leq \varepsilon$.
2. En déduire l'existence d'une suite (x_n) tendant vers $+\infty$ telle que $(x_n f(x_n))$ tend vers 0.

Exercice 12
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f et f' soient intégrables sur $\mathbb{R}_+$. Démontrer que f tend vers 0 en $+\infty$.