Exercice 1 (Question de cours.)
Donner l'énoncé ainsi que la démonstration du résultat de cours concernant le lien entre endomorphisme symétrique et matrice symétrique.

Exercice 2 (Question de cours.)
Donner l'énoncé ainsi que la démonstration du résultat de cours concernant le théorème spectral version 1 sur la réduction des endomorphismes symétriques.

Exercice 3 (Exercice préparé.)
Justifier l'existence puis calculer la somme double

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

Exercice 4 (Exercice préparé.)
Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$. En utilisant un produit de Cauchy, démontrer que

$$\frac{1}{(1-a)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n.$$

Exercice 5 (Exercice préparé.)
Soit E un espace euclidien et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique de E.

1. On suppose que $\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle = 0$. Montrer que $u = 0$.
2. Montrer l'équivalence

$$\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \lambda \geq 0.$$

Exercice 6
Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ?

1. $\{2^n \mid n \geq 0\}$
2. $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$
3. $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$
4. l'ensemble des nombres premiers
5. l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Exercice 7
On dit qu'un réel $x \in \mathbb{R}$ est un nombre *algébrique* s'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ et des entiers relatifs $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{Z}$ avec $a_d \neq 0$ tels que

$$a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Le plus petit entier d vérifiant cette propriété est alors appelé le *degré* de x.

1. Quels sont les nombres algébriques de degré 1 ?
2. Démontrer que l'ensemble des nombres algébriques de degré d est au plus dénombrable.
3. Démontrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

Exercice 8
Démontrer que pour $|q| < 1$, la famille $(q^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, et déterminer sa somme.

Exercice 9
Démontrer que les familles suivantes ne sont pas sommables.

1. $(\frac{1}{x^2})_{x\in\mathbb{Q}\cup[1,+\infty[}$
2. $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ avec $a_{n,n} = 0$ et $a_{n,p} = \frac{1}{n^2-p^2}$ si $n \neq p$

Exercice 10
On pose, pour $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $a_{m,n} = \frac{1}{(m+n)^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre donné. Étudier la sommabilité de la famille $(a_{m,n})$.

Exercice 11
Démontrer l'existence et calculer la somme

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}.$$

Exercice 12
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$w_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{k!}.$$

1. Montrer que la série de terme général w_n converge.
2. Calculer sa somme en utilisant le produit d'une série géométrique par une autre série classique.

Exercice 13
Soit $x \in]-1,1[$.

1. Démontrer que la famille $(x^{kl})_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.
2. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$$

où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.