Exercice 1 (Question de cours.)
Donner la définition et les propriétés de la probabilité conditionnelle, ainsi que la démonstration.

Exercice 2 (Question de cours.)
Donner l'énoncé et la démonstration de la formule des probabilités composées.

Exercice 3 (Question de cours.)
Donner l'énoncé et la démonstration de la sous-additivité d'une probabilité.

Exercice 4 (Exercice préparé.)
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. À quelle condition sur (x, λ) existe-il une probabilité P sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ P(\{n\}) = \lambda \frac{x^n}{n!}$?
2. À quelle condition sur (x, λ) existe-il une probabilité P sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ P(\{n\}) = \lambda x^n$?

Exercice 5 (Exercice préparé.)
On dispose de trois urnes U, V, W. Les urnes U et V contiennent chacune 1 boule blanche et 1 boule noire. L'urne W contient 2 boules noires.

1. On tire une urne au hasard parmi les trois urnes. Dans cette urne, on effectue n tirages successifs indépendants avec remise et on obtient n fois une boule noire. Quelle est la probabilité p_n que l'urne dans laquelle on tire soit W ?
2. Déterminer $\lim_{n\to\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 6
Vous êtes directeur de cabinet du ministre de la santé. Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 10000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0,1%. Autorisez-vous la commercialisation de ce test ?

Exercice 7
Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, l'information reçue d'une personne est transmise telle quelle à la personne suivante. Avec une probabilité $1-p$, l'information reçue d'une personne est transmise de façon contraire à la personne suivante. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

1. Donner une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1}.
2. En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n.
3. En déduire la valeur de $\lim_n p_n$. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 8
Une forêt se compose de trois types d'arbres : 30% sont des chênes, 50% des peupliers, et 20% des hêtres. Suite à une tempête, une maladie se déclare et touche 10% des chênes, 4% des peupliers, et 25% des hêtres. Sachant qu'un arbre est malade, quelle est la probabilité que ce soit un chêne ? un peuplier ? un hêtre ?

Exercice 9
On tire au hasard un nombre entier strictement positif. On suppose que la probabilité d'obtenir n vaut $\frac{1}{2^n}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement « n est un multiple de k ».

1. Vérifier que ceci définit une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
2. Calculer la probabilité de A_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.
3. Calculer la probabilité de $A_2 \cup A_3$.
4. Montrer que $\forall p, q \geq 2$, les événements A_p et A_q ne sont pas indépendants.

Exercice 10
On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6. Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs ?

Exercice 11
Soit E et F deux ensembles, $\mathcal{T}$ une tribu sur F et $\phi : E \to F$ une application. Montrer que $\mathcal{T}' = \left\{\phi^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{T}\right\}$ est une tribu sur E.

Exercice 12
On lance une pièce une infinité de fois. Pour $n \geq 1$, on note A_n l'événement « le n-ième lancer amène pile ».

1. Décrire par une phrase les événements suivants :
$$B = \bigcap_{n=5}^{+\infty} A_n \qquad C = \bigcup_{n=5}^{+\infty} A_n.$$
2. Écrire à l'aide des événements A_n l'événement D : « on n'obtient plus que des piles à partir d'un certain lancer ».

Exercice 13
Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses (justifiez !) ?

1. Deux événements incompatibles sont indépendants.
2. Deux événements indépendants sont incompatibles.
3. Si $P(A) + P(B) = 1$, alors $A = \bar{B}$.
4. Si A et B sont deux événements indépendants, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$