Exercice 1 (cours)

Citer le théorème de transfert. Donner la formule de l'espérance. Donner les conditions pour qu'une fonction f soit la densité d'une variable aléatoire.

Exercice 2

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi uniforme sur $[0,1]$. Trouver la densité de $X+Y$. Calculer $\mathbb{P}(\frac{1}{2} \leq X+Y \leq \frac{3}{2})$.

Exercice 3

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi exponentielle de paramètre λ. Étudier la loi de $\max(X_1, \dots, X_n)$.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.

1. Montrer que $Y = -\ln(1-X)$ suit une lio exponentielle de paramètre 1.
2. En déduire une fonction Python qui retourne un nombre aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
3. Comment faire pour avoir les lois exponentielles de paramètre λ pour λ quelconque ?

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition s'écrit $F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \alpha - e^{-x}(1+x) \text{ si } x > 0 \end{cases}$

1. Quelle est la valeur de α ?
2. Calculer $\mathbb{P}(-2 < X < 3)$.
3. X admet-elle une densité ?

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[a,b]$, calculer son espérance et sa variance. Même question avec la loi exponentielle de paramètre λ et la loi normale centrée réduite.

Exercice 7

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. Soit $U = \min(X_1, \dots, X_n)$. Démontrer que U admet une densité (que l'on déterminera).

Exercice 8

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Déterminer la loi de $\sqrt{X}, X^2, X^3$.

Exercice 9

Soit X une variable aléaoire à densité dont la fonction de répartition F est strictement croissante. Déterminer la loi de $Y = F(X)$.

Exercice 10

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition s'écrit $F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 - \exp(\frac{x^2}{2}) \text{ si } x > 0 \end{cases}$. Montrer que X est une variable à densité et déterminer une densité de X.