Exercice 1
Soit $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on pose $B = A - 3I$, où I est la matrice identité d'ordre 3.

1. Déterminer un réel a tel que $B^2 = aB$.
2. En déduire B^n en fonction de B ; et A^n en fonction de A et I.
3. En remplaçant n par $-n$ dans l'expression de A^n, obtenons-nous la matrice inverse de A^n ?

Exercice 2
Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. L'équation $AX = B$ admet-elle des solutions ?
2. Etudier l'existence et l'unicité de $X_0 \in \mathbb{R}^3$ tel que $||AX_0 - B||$ est minimal. En cas d'existence, expliciter X_0.

Exercice 3
Soit $I := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)}dt$

1. Montrer l'existence de I.
2. Montrer que $I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \frac{u}{u^2 - u\sqrt{2} + 1} - \frac{u}{u^2 + u\sqrt{2} + 1} du$.
3. En déduire que $I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Exercice 4
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^{n} (n^2 + k^2)^{\frac{1}{n}}$$

1. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \ln(u_n)$ admet une limite, et donner sa valeur.
2. En déduire la limite de u_n.

Exercice 5
Soit $r > 0$ et f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{\alpha}{\pi(x^2 + r)}$$

1. Déterminer la valeur de α pour laquelle f est une densité de probabilité. On désigne X une variable aléatoire réelle qui admet f pour densité.
2. Préciser la fonction de répartition de X, et montrer que X n'admet pas d'espérance.
3. On pose $Y = \ln|X|$. Déterminer une densité de Y et montrer que Y admet une espérance.

Exercice 6
Soit X une variable exponentielle de paramètre 1, on pose $Y = \ln X$.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Soit Z une variable indépendante de Y et de même loi. Déterminer la loi de $S = Y - Z$.
3. Soit $T = \exp S$. Déterminer la loi de T.