EXERCICE 1

Définissons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx$ (intégrale de Wallis).

1. Montrer que pour tout n, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \times W_n$; et en déduire W_n.
2. Montrer que
$$\lim_{k\to\infty} \frac{W_{2k}}{W_{2k+1}} = 1$$
3. Donner un équivalent de W_n quand n tend vers l'infini.

EXERCICE 2

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et F le sous espace vectoriel engendré par
$$B := \left\{f_1 : x \mapsto e^{-x}, f_2 : x \mapsto (x-1)e^{-x}, f_3 : x \mapsto (x^2+1)e^{-x}\right\}$$

1. Montrer que B est une base de F.
2. Montrer que la fonction Φ définit par $\Phi(f) = f'$ pour tout f dans F, est un endomorphisme de F. Ecrire sa matrice A relativement à B.
3. Calculer A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 3

Deux urnes A et B contiennent chacune n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule de A et une boule de B, dont on note respectivement a et b. On considère E l'évènement : “le rapport $\frac{a}{b}$ est un entier”.

1. Calculer $P(E)$ dans le cas où $n = 3$, $n = 4$ et dans le cas général.
2. Déterminer un encadrement de $P(E)$ et un équivalent quand n tend vers l'infini.

EXERCICE 4

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On note $U = |X-Y|$ et $V = \min(U,V)$.

1. Déterminer la loi du couple (U,V).
2. En déduire la loi de U et celle de V.
3. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

EXERCICE 5

Posons
$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))dx$$

1. Montrer que I est bien définie.
2. Rappeler la relation : $\sin(x) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})$.
3. Calculer I.

EXERCICE 6

Soient X, Y deux variables indépendantes suivant une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{2}$; et notons $M = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ en remarquant que $(1+t)^n(1+t)^n = (1+t)^{2n}$.
2. Quelle est la probabilité que M soit inversible ? diagonalisable ?