

EXERCICE 1

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice ne possédant qu'une seule valeur propre. Démontrer que A n'est pas diagonalisable, sauf si A est une matrice scalaire (*i.e.* de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{K}$).

EXERCICE 2

Un joueur dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . Il en tire successivement et avec remise deux boules, portant les numéros X_1 et X_2 . Calculer la probabilité que $\begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable. Quelle est la probabilité qu'elle soit inversible ?

EXERCICE 3

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

- Déterminer les éléments propres de A .
- Donner une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
- Calculer A^n .

EXERCICE 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -4 & 4 & -4 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Le but de l'exercice est de déterminer toutes les matrices réelles B telles que $B^2 = A$.

- Déterminer des matrices $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et $D \in M_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que $P^{-1}AP = D$.
- On suppose donnée $B \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$. Démontrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B . En déduire que $P^{-1}BP$ est diagonale.
- Résoudre le problème.

EXERCICE 5

Soit a et b des paramètres réels. Déterminer pour quelles valeurs de a et b les matrices réelles suivantes sont diagonalisables.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 6

On note \mathcal{B} la base canonique du \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C}^4 . Soit la matrice de $M_4(\mathbb{C})$:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ On note } g \text{ l'endomorphisme de } \mathbb{C}^4 \text{ de matrice } J \text{ dans la}$$

base \mathcal{B} .

- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^4 = 1$.
- On note \mathcal{S} l'ensemble des valeurs propres de g .
 - Montrer que $\mathcal{S} = \{1, i, -1, -i\}$.
 - g est-il diagonalisable ?
 - Déterminer une base de chaque sous-espace propre, formée de vecteurs dont la première coordonnée vaut 1.
- Calculer les puissances successives de la matrice J .

EXERCICE 7

Soit f un endomorphisme de \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie. Montrer $0 \notin \text{Sp}(f) \Leftrightarrow f$ surjectif.

EXERCICE 8

Soient f un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $0 \in \text{Sp}(f^n)$. Montrer que $0 \in \text{Sp}(f)$.

EXERCICE 9

Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E tel que tout vecteur non nul en soit vecteur propre. Montrer que u est une homothétie vectorielle (*i.e.* $\exists \lambda \in \mathbb{K} \forall x \in E, u(x) = \lambda x$).

EXERCICE 10

Soient u et v deux endomorphismes d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que si λ est valeur propre de $u \circ v$ alors λ est aussi valeur propre de $v \circ u$.