Exercice 1

Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz et sa démonstration, puis prouver :

1. Pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$$

   Etudier le cas d'égalité.

2. Pour tout $n \geq 2$:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{(n-i)^2} \geq \frac{2}{n(n-1)} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n-i}\right)^2$$

Exercice 2

Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz et sa démonstration, puis prouver :

1. Pour tout $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} i\sqrt{i} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$$

2. Pour tout $n \geq 1$ et $(x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tel que $x_1 + ... + x_n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2$$

   Etudier le cas d'égalité.

Exercice 3

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique, et on définit l'endomorphisme p par sa matrice

$$M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Montrer que p est une projection orthogonale sur un plan dont on précisera une équation.

Exercice 4

On considère la droite vectorielle dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = x\}$$

1. Déterminer la distance du vecteur $(1,0)$ à la droite D.
2. Plus généralement, soit (a,b) un couple de $\mathbb{R}^2$ distinct de $(0,0)$ et D la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ d'équation $ax + by = 0$. Soit $A(x_A, y_A)$ un point de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la distance de A à D.
3. Autre méthode. Soit $H(x_H, y_H)$ le projeté orthogonal de A sur D.
   (a) Déterminer une base de $D^\perp$.
   (b) En déduire que le vecteur HA est colinéaire à un certain vecteur que l'on précisera.
   (c) En déduire la distance du point A à la droite D.

Exercice 5

Soit $\mathbb{R}^3$ munie de sa base canonique, et f l'endomorphisme représenté par sa matrice

$$\Omega = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

1. Justifier qu'il existe une base orthonormale de vecteurs propres pour f.
2. Soit $v = (x,y,z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$, établissons $\|f(v)\| = \|v\|$:
   (a) Méthode directe : expliciter $f(v)$. Conclure.
   (b) Méthode matricielle :
      i. Que vaut ${}^t\Omega\Omega$?
      ii. Quelle est la matrice colonne des coordonnées de $f(v)$ relativement à la base canonique ? Conclure.
3. Que peut-on déduire sur les valeurs propres de f ?
4. Déterminer $E_{-1}(f)$ et en déduire le spectre de f ainsi que la dimension des sous-espaces propres de f .
5. On dit que f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle. Expliquer.

Exercice 6
Considérons la norme euclidienne sur $M_n(\mathbb{R})$ (à expliquer ...) ; et pour $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$, calculer :

$$\inf_{M\in S_n(\mathbb{R})} \left(\sum_{1\leq i,j\leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 \right)$$

où $S_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques réelles.

Exercice 7
Soient x et y deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur x et y, pour que la projection orthogonale de x sur $\mathrm{Vect}(y)$ est égale à la projection orthogonale de y sur $\mathrm{Vect}(x)$.