Exercice 1
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite $\ell$ en $+\infty$. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente si $\ell \neq 0$.

Exercice 2
Démontrer que $\int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente. On pourra faire une intégration par partie.

Exercice 3
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha$ pour que $\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ soit convergente.

Exercice 4
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ est convergente. On pourra utiliser le théorème sur l'image d'un segment par une fonction continue.
2. Montrer que si $f$ est strictement positive, $\int_0^1 \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ est divergente.
3. Établir la même conclusion en supposant seulement que $f(0) > 0$.

Exercice 5
Pour $x > 0$, on note $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que cette intégrale est bien définie pour tout $x > 0$.
2. Justifier $\forall x > 1,\ \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ et calculer $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6
Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)} \qquad \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(e^t+1)(e^{-t}+1)}$$

$$\int_0^{\infty} \ln(1+\frac{1}{t^2})\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{\infty} \exp(-\sqrt{t})\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{e^t+1}} \qquad \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}(t)}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 7
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f$ et $f'$ soient intégrables sur $[0,+\infty[$. Montrer que $f$ tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 8
Soit $f : [0,+\infty[$ une fonction continue par morceaux. On suppose que $\int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente. Montrer que $\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Exercice 9
Montrer l'existence et déterminer la valeur de $I(a) = \int_0^{\infty} \sin(t)e^{-at}$.

Exercice 10
Soit $f$ définie par $f(a) = \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a+1}$.

1. Pour quelles valeurs de $a$ $f$ est-elle bien définie ?
2. Montrer que $f$ est décroissante de limite nulle.