Exercice 1 (Cours)
Quelle est la définition d'un sous-espace vectoriel ? D'une famille libre ? D'une famille génératrice ? D'une base ? Énoncer le théorème de la base incomplète.

Exercice 2
Soit (F_n) une suite de sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E.

1. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que si (F_n) est croissante (au sens de l'inclusion), $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 3
Montrer qu'une famille de polynômes de degrés deux à deux distincts est libre

Exercice 4
Soit $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \in \mathbb{R}$ et $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{\lambda_i x}$. Montrer que $(f_2, \dots, f_n)$ est libre.

Exercice 5
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension fini n. On admet que E est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Montrer que sa dimension en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel est $2n$.

Exercice 6
Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?
— $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$
— $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$
— $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$
— $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$
— $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$
— $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$

Exercice 7
Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?
— $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ est bornée}\}$
— $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ est monotone}\}$
— $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ converge}\}$
— $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ est arithmétique}\}$

Exercice 8
Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?
— $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ est monotone}\}$
— $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ s'annule}\}$
— $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ s'annule en } 0\}$
— $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ est impaire}\}$

Exercice 9
Soit $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux familles de vecteurs. Comparer $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$ et $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_1) \cup \mathrm{Vect}(\mathcal{F}_2)$.

Exercice 10
Soit $u = (1,1,1)$ et $v = (1,0,-1)$. Montrer que $\mathrm{Vect}(u,v) = \{(2\alpha, \alpha+\beta, 2\beta) \mid (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}$