Exercice 1 (Démonstrations préparées.)
Traiter deux questions.

1. Montrer que la fonction $sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ est impaire sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)\cos^2(x)$. Montrer qu'il suffit d'étudier la courbe sur $[0, \pi]$ et expliquer comment obtenir toute la courbe représentative de f à partir de cette étude.
4. Étudier la limite en 0 de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln^2(x) + 2\ln(x)}{\ln^2(x) + 1}$.
5. Déterminer $\lim_{x\to 0} x \sin(\frac{1}{x})$.

Exercice 2
Pour $x, y \in \mathbb{R}$, montrer l'inégalité $(x - \sqrt{2}y)^2(x + \sqrt{2}y)^2 \leq x^4 + 4y^4$. À quelle condition a-t-on égalité ?

Exercice 3
Étudier les fonctions dont les expressions sont les suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$
2. $g(x) = 2|2x - 1| - |x + 2| + 3x$
3. $h(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x + 1}$
4. $t(x) = \ln(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2})$

Exercice 4
Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto e^x(1 - x)^2 \qquad g : x \mapsto \ln(e^x + e^{-x}) \qquad h : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

$$t : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad u : x \mapsto \sin(x) - \frac{1}{3}\sin^2(x) \qquad v : x \mapsto \tan^2(x) + \ln(\cos^2(x))$$

Exercice 5
Calculer les limites suivantes :

$$(1) \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x} \qquad (2) \lim_{x\to 3^-} \frac{|x-3|}{x-3} \qquad (3) \lim_{x\to 1^-} \ln(\frac{1+x}{1-x})$$

$$(4) \lim_{x\to 0} 2x\ln(x + \sqrt{x}) \qquad (5) \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{\sqrt{2x+3}} \qquad (6) \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x$$

Exercice 6
Soit $0 \leq a, b \leq 1$. Prouver que $a + b \leq 1 + ab$.

Exercice 7
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction telle que pour tout $x \geq 0$, on a $f(x)e^{f(x)} = x$. Étudier les variations de f.

Exercice 8
Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elles sont injectives, surjectives, bijectives.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x - 1 \end{array} \quad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]0, +\infty[\\ x & \mapsto & e^x \end{array}$$

$$t : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 4 - e^{-x} \end{array} \quad u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x)\sin(x) \end{array} \quad v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$$

Exercice 9
Résoudre les inéquations suivantes.

1. $|2x - 3| < |x + 2|$
2. $|x^2 - 10| \leq 6$
3. $\left|\dfrac{1}{x} - 2\right| < 4$

Exercice 10
Résoudre les inéquations suivantes.

1. $|x^2 - 6x + 4| \leq 1$
2. $|x - 1| \leq |2x + 1| + 1$
3. $\dfrac{x}{x+1} \leq \dfrac{x+2}{x+3}$
4. $\sqrt{x^2 - 1} < 2 - x$

Exercice 11
Pour chacune des applications suivantes, dire si elles sont injectives, surjectives, bijectives.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & 2y \end{array} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (1, x - y, y) \end{array}$$

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (2x + y, 3x - 2y) \end{array} \quad t : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y + z, x - y - z, x) \end{array}$$