

EXERCICE 1 (Démonstrations préparées.)

Traiter deux questions.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$.
2. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$ est injective.
3. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$ est surjective.
4. Montrer que la fonction $sh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ est impaire sur \mathbb{R} .
5. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

EXERCICE 2

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, montrer l'inégalité $(x - \sqrt{2}y)^2(x + \sqrt{2}y)^2 \leq x^4 + 4y^4$. À quelle condition a-t-on égalité ?

EXERCICE 3

Étudier les fonctions dont les expressions sont les suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$
2. $g(x) = 2|2x - 1| - |x + 2| + 3x$
3. $h(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x + 1}$
4. $t(x) = \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$

EXERCICE 4

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto e^x(1 - x)^2 \quad g : x \mapsto \ln(e^x + e^{-x}) \quad h : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

$$t : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad u : x \mapsto \sin(x) - \frac{1}{3} \sin^2(x) \quad v : x \mapsto \tan^2(x) + \ln(\cos^2(x))$$

EXERCICE 5

Calculer les limites suivantes :

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{x-3} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} 2x \ln(x + \sqrt{x}) \quad (5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{\sqrt{2x+3}} \quad (6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x$$

EXERCICE 6

Soit $0 \leq a, b \leq 1$. Prouver que $a + b \leq 1 + ab$.

EXERCICE 7

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction telle que pour tout $x \geq 0$, on a $f(x)e^{f(x)} = x$. Étudier les variations de f .

EXERCICE 8

Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elles sont injectives, surjectives, bijectives.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$$

$$x \mapsto x \quad x \mapsto 3x - 1 \quad x \mapsto x^2 \quad x \mapsto e^x$$

$$t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto 4 - e^{-x} \quad x \mapsto \cos(x) \sin(x) \quad x \mapsto |x|$$

EXERCICE 9

Résoudre les inéquations suivantes.

1. $|2x - 3| < |x + 2|$
2. $|x^2 - 10| \leq 6$
3. $\left| \frac{1}{x} - 2 \right| < 4$

EXERCICE 10

Résoudre les inéquations suivantes.

1. $|x^2 - 6x + 4| \leq 1$
2. $|x - 1| \leq |2x + 1| + 1$
3. $\frac{x}{x+1} \leq \frac{x+2}{x+3}$
4. $\sqrt{x^2 - 1} < 2 - x$