Exercice 1 (Exercice préparé.)
Démontrer par récurrence que

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 2 (Exercice préparé.)
Démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Exercice 3 (Exercice préparé.)
Calculer

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Exercice 4 (Exercice préparé.)
En effectuant un changement de variable, calculer

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k$$

Exercice 5 (Exercice préparé.)
Calculer

$$\prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k^2}).$$

Exercice 6
Déterminer les racines quatrièmes de i et les racines cubiques de $-\frac{8\sqrt{2}}{1+i}$.

Exercice 7
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes
1. $z^2 - (6+i)z + (11+13i) = 0$
2. $z^2 + (4-3i)z = 2+8i$
3. $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$
4. $z^2 + 5z + 7 - i = 0$

Exercice 8
On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante

$$(4z^2 - 20z + 37)(2z - 7 + 2i) = 0.$$

Démontrer que les solutions de cette équation sont les affixes de points appartenant à un même cercle, dont le centre est le point d'affixe 2.

Exercice 9
Calculer

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}.$$

Exercice 10
Calculer les produits

$$P_1 = \prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{1}{k}) \qquad P_2 = \prod_{k=1}^{n} \sqrt{k(k+1)} \qquad P_3 = \prod_{k=1}^{n} (2k) \qquad P_4 = \prod_{k=1}^{n} \frac{4^k}{k^2}$$

Exercice 11
Soient $(a_k)_{1\le k\le n}$ and $(b_k)_{1\le k\le n}$ deux familles de nombre réels, $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel, et $p \in \mathbb{N}$ un entier.
1. Les égalités suivantes sont-elles vraies ou fausses en général ?

$$a)\ \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad b)\ \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \times \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$c)\ \sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad d)\ \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^p = \sum_{k=1}^{n} a_k^p$$

2. Même question en remplaçant le signe $\sum$ par $\prod$.

Exercice 12
Calculer

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots \binom{n}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}.$$

Exercice 13
Montrer par récurrence que

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

Exercice 14
Calculer les sommes

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} k \times k! \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{n} \cos(\frac{k\pi}{2}) \qquad S_4 = \sum_{k=0}^{n} (3k+7)$$