Exercice 1 (Démonstrations préparées.)
Traiter deux questions.

1. Prouver que si n^2 est pair, alors n est pair (par contraposée).
2. Résoudre l'équation $\sqrt{5-x} = 1 + x$.
3. Résoudre l'équation $x^3 - x^2 + x - 6 = 0$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, on a $2^n > n$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier.

Exercice 2
Soit A, B, C trois ensembles. Montrer que $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$.

Exercice 3
Que peut-on dire de deux ensembles A, B tels que $A \cup B = A \cap B$?

Exercice 4
Montrer que pour tout entier $n \geq 4$, on a $n! \geq n^2$ (où $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$).

Exercice 5
Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes puis dans chaque cas dire si la proposition est vraie ou fausse.

1. « Tout entier naturel est pair ou impair. »
2. « Tout entier naturel est pair ou tout entier naturel est impair. »
3. « Pour chaque entier, on peut trouver un entier strictement plus grand. »
4. « Il y a un entier plus grand que tous les entiers. »

Exercice 6
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes.

1. « f est constante sur $\mathbb{R}$. »
2. « f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$. »
3. « f ne prend jamais deux fois la même valeur. »
4. « f prend des valeurs arbitrairement grandes. »
5. « f présente un minimum. »

Exercice 7
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Exprimer verbalement la signification des propositions suivantes.

1. « $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda$ »
2. « $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda$ »
3. « $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ »
4. « $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ »
5. « $\forall M \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq a \Rightarrow f(x) \geq M$ »

Exercice 8
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2} = 2$.

Exercice 9
Résoudre les inéquations suivantes.

1. $|2x - 3| < |x + 2|$
2. $|x^2 - 10| \leq 6$
3. $\left|\dfrac{1}{x} - 2\right| < 4$

Exercice 10
Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel, c'est-à-dire $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 11
Résoudre les inéquations suivantes.

1. $|x^2 - 6x + 4| \leq 1$
2. $|x - 1| \leq |2x + 1| + 1$
3. $\dfrac{x}{x+1} \leq \dfrac{x+2}{x+3}$
4. $\sqrt{x^2 - 1} < 2 - x$

Exercice 12
Pour $x, y \in \mathbb{R}$, montrer l'inégalité $(x - \sqrt{2}y)^2(x + \sqrt{2}y)^2 \leq x^4 + 4y^4$. À quelle condition a-t-on égalité ?

Exercice 13
Nous allons prouver que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ est divisible par 6.

1. Traduire en « langage mathématiques ».
2. Démontrer cette assertion.

Exercice 14
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $x^3 - 13x + 12 = 0$ puis factoriser l'expression $x^3 - 13x + 12$.